

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

СИДОРЕЦЬ Володимир Миколайович

УДК 621.3.011.72:537.523.5:621.372.44:51-74

ХАОТИЧНА ДИНАМІКА
ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З ДУГОЮ

Спеціальність 05.09.05 – теоретична електротехніка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ - 2009

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі фізики газового розряду та техніки плазми Інституту електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України (м. Київ).

Науковий консультант – доктор технічних наук, професор
Пентегов Ігор Володимирович,
провідний науковий співробітник відділу електротермії
Інституту електрозварювання ім. Є. О. Патона
НАН України.

Офіційні опоненти: – доктор технічних наук, професор, чл.-кор. НАН України
Васильєв Всеволод Вікторович,
завідувач Відділення гібридних моделюючих та
керуючих систем в енергетиці Інституту
проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова
НАН України;

– доктор технічних наук, чл.-кор. НАН України
Шидловська Наталія Анатоліївна,
головний науковий співробітник
відділу теоретичної електротехніки
Інституту електродинаміки НАН України;

– доктор технічних наук
Коротинський Олександр Євтихіївич,
завідувач відділу автоматизації наукових досліджень
Інституту електрозварювання ім. Є. О. Патона
НАН України.

Захист дисертації відбудеться «__» _____ 2009 р. об 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.187.01 в Інституті електродинаміки НАН України за адресою: 03680, м. Київ-57, проспект Перемоги, 56. Тел. 456-91-15

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту електродинаміки НАН України за вищевказаною адресою.

Автореферат розіслано «__» _____ 2009 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Ю.М.Гориславець

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Електрична дуга є багатофункціональним інструментом різноманітних промислових технологічних процесів. Серед них і класичні технологічні процеси електродугового зварювання, електродугової виплавки сталі, і новітні, основи яких тільки закладаються, наприклад, гібридне лазерно-дугове зварювання. Це обумовлює актуальність досліджень як самої електричної дуги, так і електричних кіл, до яких вона входить. Особливої уваги заслуговує проблема стійкості системи „електрична дуга – джерело живлення”, оскільки від неї залежить стабільність технологічного процесу і якість виробів. Таким чином дослідження електричних кіл з дугою є важливою науково-технічною проблемою теоретичної електротехніки.

За останні два десятиліття було досягнуто значних успіхів і одержано фундаментальні знання, які пов'язані з детермінованим хаосом. Це явище спостерігається тільки в нелінійних динамічних системах незалежно від їх походження: механічного, гідродинамічного, фізичного, хімічного, біологічного, екологічного, економічного. Серед електротехнічних та радіотехнічних нелінійних кіл, де виявлено детермінований хаос, необхідно відзначити електричні кола з тунельним діодом, що детально вивчалися вченими школи О.О.Андропова, генератор з інерційним зворотнім зв'язком, досліджений В.С.Аніщенком, кола Чуа (Chua's circuits), неавтономні кола з варікапним діодом, схеми ключових перетворювачів, що досліджувались В.Я.Жуйковим і І.Є.Коротєєвим. Електричні кола з дугою в цьому напрямку не досліджувались, хоча нелінійність та інерційність – це ті властивості електричної дуги, які притаманні електричним колам, що згадувались вище.

Моделювання електричних кіл – один з ефективних і результативних способів дослідження. Тим більше, що за допомогою моделювання нелінійних динамічних систем одержано основоположні результати в царині детермінованого хаосу. Автором в свій час було розроблено узагальнену математичну модель динамічної дуги, яка враховує як нелінійність вольтамперної характеристики електричної дуги, так і теплову інерційність, пов'язану з процесами нагріву, дисоціації та іонізації плазми розряду.

Актуальним є розширення області застосування узагальненої моделі дуги на опис динаміки геометричних розмірів дуги. Динаміка зміни радіусу стовпа дуги допоможе вивчати акустику електричної дуги та її динамічну силову дію. Динаміка зміни довжини дуги допоможе досліджувати, наприклад, процеси зварювання плавким електродом.

Дослідження нелінійних електричних кіл потребує розробки спеціальних аналітичних та чисельних методів. Тим більше, що результати, які одержуються з їх допомогою, мають міждисциплінарний характер і можуть бути використані при дослідженні динамічних систем іншої природи.

Все вищесказане свідчить про актуальність досліджень електричних кіл з дугою, особливо, що стосується їх хаотичної динаміки.

Зв'язок дисертації з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відділі фізики газового розряду і техніки плазми

Інституту електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України в рамках цільової наукової програми «Фундаментальні проблеми створення матеріалів з наперед заданими властивостями, методів їх з'єднання і обробки» по темі «Розробка гібридних лазерно-дугових і лазерно-плазмових процесів зварювання та обробки матеріалів, а також створення нових функціональних покриттів з наперед заданими властивостями» (№ ДР 0102U005772). Вказані науково-дослідні роботи, одним з відповідальних виконавців яких був здобувач, який досліджував детермінований хаос в електричних колах з дугою, були базовими для підготовки і представлення цієї дисертації.

Мета і задачі дослідження. Визначити фундаментальні та технологічні властивості електричної дуги як нелінійного елемента електричних кіл, виявити закономірності та механізми виникнення в цих колах детермінованого хаосу, а також сценарії його розвитку. Розробити математичні методи дослідження нелінійних динамічних систем та визначити властивості електричних кіл з дугою, які мають фундаментальний, міждисциплінарний характер.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні задачі:

1. Визначити залежність акустичної та динамічної силової дії електричної дуги від форми і параметрів електричного струму.
2. Проаналізувати перехідні процеси та стійкість RC-кіл з електричною дугою і знайти умови виникнення в них автоколивань.
3. Виявити біфуркації RLC-кіл з електричною дугою, в тому числі ті, що призводять до появи хаотичних коливань.
4. Визначити шляхи та закономірності переходу до детермінованого хаосу. Провести класифікацію структур біфуркаційних діаграм.
5. Виявити фундаментальні властивості електричних кіл з дугою, які могли бути використані при вивченні інших нелінійних динамічних систем.
6. Розробити спеціалізовані математичні методи дослідження нелінійних динамічних систем, зокрема, для застосування при вивченні електричних кіл з дугою.

Об'єкт дослідження – нелінійні електричні кола з електричною дугою.

Предмет дослідження – динамічні процеси в нелінійних електричних колах з дугою, що призводять до виникнення детермінованого хаосу; акустичні та динамічні силові властивості електричної дуги.

Методи дослідження. В роботі використовувались аналітичні та чисельні методи дослідження фізичних явищ, що відбуваються в електричних колах з дугою. Застосовувались методи комп'ютерного моделювання перехідних процесів, методи дослідження стійкості, методи якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, методи теорії біфуркацій.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Вперше отримано математичну модель динамічної дуги, яка описує зміну геометричних розмірів дуги при зміні струму, що дає можливість дослідити акустичні та динамічні силові властивості електричної дуги.

2. Одержано аналітичні залежності параметрів RC-кола з дугою, що визначають тип біфуркації Хопфа, а також можливість виникнення автоколивань.

3. Визначено біфуркації RLC-кіл з електричною дугою, що призводять до появи детермінованого хаосу, а також сценарії його розвитку.

4. Вперше проведено класифікацію структур біфуркаційних діаграм і виявлено три елементарних структури, які мають властивості: 1) м'якості та зворотності, 2) жорсткості та незворотності, 3) жорсткості та зворотності. Визначено, що остання структура містить в своєму складі ізольовані ділянки.

5. Запропоновано модифікований метод багатократної стрільби, який базується на використанні просторових інтервалів і дозволив визначити, що каскад біфуркацій подвоєння періоду в RLC-колі з електричною дугою характеризується константою, близькою до константи Фейгенбаума.

6. Вперше виявлено складчасту структуру залежності амплітуди періодичних розв'язків від біфуркаційного параметра, яка дозволяє передбачити поведінку біфуркаційних діаграм для електричних кіл з дугою і визначити місце знаходження ізольованих ділянок.

Практичне значення одержаних результатів. У ході виконання дисертаційної роботи були розроблені математичні моделі динаміки геометричних характеристик електричної дуги, а саме радіуса стовпа і довжини дуги. Ці моделі можуть знайти застосування при визначенні таких технологічних параметрів дуги, як динамічна силова дія дуги на метал, що обробляється, акустичного впливу дуги на оточуюче середовище, зокрема людину, а також при удосконаленні таких технологічних процесів, як зварювання плавким електродом.

На основі проведених досліджень розроблено науково обґрунтовані рекомендації щодо вибору схем при проектуванні джерел живлення електричної дуги із зворотними зв'язками.

Результати досліджень кіл змінного струму з дугою дали можливість запропонувати нові схеми джерел живлення з використанням конденсаторів.

Явище детермінованого хаосу в електричних колах з дугою знайде застосування при створенні нових дугових технологій, зокрема нових зварювальних технологій.

Фундаментальність отриманих результатів, що визначають властивості детермінованого хаосу, дозволяє застосовувати їх при дослідженні динамічних систем іншої природи.

Результати роботи, а саме математичні моделі та програмне забезпечення, можуть бути використані при розробці джерел живлення електричної дуги, а також в процесі підготовки спеціалістів (магістрів та аспірантів) за спеціальностями «Промислова електроніка» та «Зварювання та споріднені процеси і технології» в Національному технічному університеті України „КПІ” і в ІЕЗ ім. Є. О. Патона.

Особистий внесок здобувача. Здобувачем особисто одержано аналітичні залежності параметрів RC-кола з дугою, що визначають тип біфуркації Хопфа; проведена класифікація структур біфуркаційних діаграм і виявлено три елементарних структури, які зустрічаються на різних масштабних рівнях; запропоновано модифікований метод багатократної стрільби, який дозволяє визначити характерну

константу каскаду біфуркацій подвоєння періоду, яка виявилася близькою до константи Фейгенбаума; виявлено складчасту структуру залежності амплітуди періодичних розв'язків від біфуркаційного параметра, яка дозволяє передбачити поведінку біфуркаційних діаграм для електричних кіл з дугою; досліджено особливості аналізу власних значень математичних моделей нелінійних електричних кіл, які застосовано до кіл з електричною дугою; досліджено хаотичні і періодичні коливання та їх взаємодія в електричному колі з дугою; перевірено чотири критерії детермінованого хаосу для електричних кіл з дугою; отримано одне різницеве рівняння, яке описує динаміку електричних кіл з дугою, замість трьох диференціальних рівнянь.

У наукових працях, написаних у співавторстві, безпосередньо дисертанту належить наступне: розроблено математичну модель динамічної дуги, яка описує зміну геометричних розмірів дуги при зміні струму, що дає можливість досліджувати акустичні властивості електричної дуги [1]; досліджено динамічні силові властивості електричної дуги [2]; виявлено можливість виникнення автоколивань, що призводять до появи детермінованого хаосу в RLC-колі з електричною дугою [4]; досліджено структуру дивного аттрактора в RLC-колі з електричною дугою [5]; визначено сценарії розвитку детермінованого хаосу в RLC-колі з електричною дугою [6]; запропоновано інтервальну розмірність для виявлення фрактальної структури перерізу Пуанкаре дивного аттрактора в RLC-колах з електричною дугою [10]; запропоновано використання конденсаторів в колах змінного струму з дугою [11]; запропоновано використання конденсаторів з додатковою обмоткою трансформатора в колах змінного струму з дугою [12]; запропоновано використання конденсаторів у колах з дугою, яка живиться від випрямляча [13]; перевірено і протестовано чисельні методи, які розроблялися для вивчення електричних кіл з дугою, на нелінійній гідродинамічній моделі суцільного середовища і виявлено детермінований хаос [15]; досліджено властивості детермінованого хаосу в ключових електричних колах, коли дуга моделюється резистором або проти-ЕРС [17]; розроблено модель дуги з плавким електродом [18]; запропоновано емпіричні формули залежності контактного падіння напруги між мундштуком та електродним дротом від параметрів процесу зварювання [19]; застосовано розроблену модель дуги з плавким електродом для дослідження імпульсно-дугових систем [20]; модифіковано методи аналізу періодичних режимів для дослідження кіл змінного струму з дугою [21].

Апробація результатів дисертації. Основні положення й результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на Першій українсько-американській школі “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Судак, Україна, 1993); міжнародній конференції «Differential Equation: Bifurcations and Chaos» (Кацивелі, Україна, 1994); міжнародній конференції NDES'94 «Nonlinear Dynamics of Electronics Systems» (Краків, Польща, 1994); VII науковій школі «Фізика імпульсних разрядів в конденсованих середовищах» (Миколаїв, Україна, 1995); Українській науковій конференції «Моделирование и исследование устойчивости систем» (Київ, Україна, 1996); міжнародній конференції «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» (Київ, Україна, 1997); міжнародній конференції CMS'05

«Computer Methods and Systems» (Краків, Польща, 2005); міжнародній конференції «Моделирование-2006» (Київ, Україна, 2006); міжнародній конференції «Силовая электроника та енергоефективність» (Алушта, Україна, 2007); міжнародній конференції «Проблеми сучасної електротехніки» (Київ, Україна, 2000, 2002, 2008); міжнародній конференції «Nonlinear Dynamics» (Харків, Україна, 2004, 2007); а також на семінарах ІЕЗ ім. Є. О. Патона НАНУ.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 28 друкованих праць, з них 21 стаття у наукових фахових виданнях та 7 у матеріалах конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, 6 розділів, висновків, трьох додатків, списку використаної літератури. Дисертація має загальний обсяг 422 сторінки, в тому числі 267 сторінок основного тексту, 192 рисунки на 96 сторінках, 4 таблиці, список літератури з 216 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання дисертаційної роботи, описано об'єкт, предмет і методи дослідження. Сформульовано наукову новизну отриманих результатів, відображено їх практичне значення, відзначено особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** проведено аналіз публікацій, присвячених теоретичному дослідженню і математичному моделюванню електричної дуги. Виявлено, що моделі дуги базуються як на мікроскопічному підході, так і на феноменологічному. Перший підхід вимагає розв'язку системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, що відповідають законам газодинаміки плазми, рівнянням Максвела, закону Ома для мікроскопічного об'єму плазми. Інтегрування по всьому об'єму дає такі характеристики як струм дуги і падіння напруги на ній. В феноменологічному підході стовп дуги розглядається як об'єкт з уже відомою вольтамперною характеристикою, що більш перспективно при застосуванні в задачах електротехніки при аналізі електричних кіл з зосередженими параметрами. Оскільки ставилася задача вивчення динаміки електричних кіл з дугою, основна увага приділялася динамічним моделям дуги.

В результаті порівняння феноменологічних динамічних моделей електричної дуги зроблено висновок, що подальші дослідження треба базувати на узагальненій моделі електричної дуги, розробленій в Інституті електрозварювання ім.Є.О.Патона. Всі існуючі моделі є частковими випадками узагальненої моделі. Оскільки вона виходить з фізичних законів (зокрема, закону збереження енергії), область її застосування можна розширити на випадки описання акустичної та динамічної силової дії електричної дуги і моделювання дуги з плавким електродом.

Наведено приклади нелінійних динамічних систем електротехнічного та радіотехнічного походження (кола з тунельним діодом, генератор з інерційним зворотнім зв'язком, кола Чуа, неавтономні кола з варікапним діодом, схеми ключових перетворювачів) та нелінійні електромеханічні моделі (дводискове динамо Рікітаке, динамо Булларда, антидинамо), в яких спостерігається явище детермінованого хаосу.

Активні дослідження детермінованого хаосу, який притаманний багатьом нелінійним динамічним системам, започатковані лише два десятиліття. На сьогоднішній день детермінований хаос виявлений у механічних, гідродинамічних, фізичних, хімічних, біологічних, екологічних, економічних динамічних системах. Отримані фундаментальні результати по властивостях детермінованого хаосу мають фундаментальний і міждисциплінарний характер. З цієї точки зору важливо отримувати знання на простих моделях, які можна одержати при вивченні нелінійних електричних кіл з дугою. Тим більше, що дузі притаманні дві основні властивості, які мають згадані вище електричні кола – нелінійність та інерційність.

Перелічені факти потребують ретельного дослідження нелінійних кіл з дугою, розробки відповідних фізико-математичних моделей, а також проведення чисельних експериментів, що й складає основний зміст даної дисертаційної роботи.

У **другому розділі** зроблено розширення області використання вищевказаної узагальненої моделі динамічної електричної дуги, а саме, застосування цієї моделі для вивчення динаміки зміни геометричних розмірів (радіуса стовпа і довжини) дуги при зміні її струму.

Було використано перевагу, яку надає тільки узагальнена модель, що полягає в можливості виразити внутрішню енергію дуги через її електричні характеристики

$$Q = 2\theta \int_0^{i_0} U(i_\theta) di_\theta, \quad (1)$$

де θ – постійна часу дуги, а функція $U(i)$ визначає статичну вольтамперну характеристику (ВАХ) дуги. Ця функція знаходиться в результаті експерименту – натурального або чисельного. В багатьох випадках використовувалась степенева апроксимація ВАХ дуги у вигляді

$$U(i) = U_0 \left(\frac{i}{I_0} \right)^n, \quad (2)$$

де U_0, I_0 – координати довільної точки на ВАХ дуги. При від'ємних значеннях n формула (2) визначає нелінійний спадний характер ВАХ дуги. Як показує експеримент, для дуг, що горять вільно, $n = -1/3$.

Струм стану дуги i_0 , що входить в формулу (1), визначає її динаміку і, згідно з узагальненою моделлю, пов'язаний з струмом дуги i диференціальним рівнянням

$$\theta \frac{di_\theta^2}{dt} + i_\theta^2 = i^2, \quad (3)$$

яке впливає із закону збереження енергії.

З іншого боку, внутрішню енергію дуги можна виразити через термодинамічні характеристики і геометричні розміри (зокрема, радіус) дуги. Порівнюючи внутрішню енергію виражену через електротехнічні (1) та термодинамічні характеристики, одержуємо динамічну модель зміни радіуса стовпа дуги

$$r_A(t) = r_{A0} \left(\frac{i_\theta(t)}{I_0} \right)^{\frac{1+n}{2}}, \quad (4)$$

де r_{A0} – радіус стовпа дуги, що відповідає статичному стану із струмом I_0 .

Динамічна модель зміни радіуса стовпа дуги дозволила розв'язати принаймні дві задачі: акустичну та силову.

Відомо, що температура плазми дуги на три порядки вища за температуру оточуючого середовища. Отже і густина плазми в дузі на три порядки нижча за густину газу оточуючого середовища. Це дає підставу розглядати зміну радіуса стовпа дуги як рух жорсткої стінки, що породжує акустичну хвилю. При такому припущенні дугу можна розглядати як акустичний випромінювач.

Для постійного струму з гармонічною змінною складовою було досліджено залежності такої акустичної характеристики дуги як рівень інтенсивності звуку від наступних параметрів: частоти змінної складової струму, відношення амплітуд змінної і постійної складової, постійної часу дуги. Порівняння отриманих результатів із експериментальними даними інших дослідників показує хороше узгодження і дає підставу зробити висновок про адекватність запропонованої моделі (4).

Для постійного струму з прямокутною змінною складовою визначено умову утворення ударних звукових хвиль

$$\delta I > \sqrt{\frac{4c\theta}{(1+n)r_{A0}} + 1} - 1, \quad (5)$$

де δI – відносна зміна струму, c – швидкість звуку в повітрі.

Проведені дослідження важливі з точки зору виявлення впливу акустичного випромінювання дуги на людину. Ударні хвилі можуть призвести до руйнування газового захисту дуги, що негативно впливає на технологічний процес. Характеристики звуку можна виміряти і разом з напругою та струмом дуги, використовувати, наприклад, як сигнал зворотного зв'язку. Звучання дуги дає можливість безпосередньо реєструвати хаотичні коливання в електричних колах з дугою.

Динамічна силова дія електричної дуги відрізняється від статичної тим, що можна значно збільшити тиск дуги і досягти, наприклад, більшого проплавлення металу, що важливо для зварювання. В зварюванні з цією метою давно застосовується так званий модульований або імпульсний струм, хоча пояснення механізму дії такого струму немає.

Як відомо, максимальний магнітний тиск на осі дуги визначається її струмом і радіусом стовпа дуги

$$p_{\max} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi^2 r_A^2}, \quad (6)$$

де μ_0 – магнітна постійна. Ця формула справедлива і для динамічної дуги. При різкій зміні струму радіус стовпа дуги не змінюється миттєво. Тільки з плином часу він починає змінюватись згідно формул (4) та (3). Отже на фронті імпульсу струму маємо підвищення тиску (6). При спаді імпульсу маємо зниження тиску. Але при великих частотах слідування імпульсів розплавлений метал, власна частота руху якого набагато нижча, відчуває інтегральну (середню) дію імпульсів струму

$$\bar{p}_{\max} = \frac{1}{t_i + t_p} \left(\int_0^{t_i} p_{\max,i}(t) dt + \int_0^{t_p} p_{\max,p}(t) dt \right), \quad (7)$$

де t_i і t_p – тривалість імпульсу і паузи.

Дослідження показали, що середній тиск імпульсного струму завжди більший за тиск, що спричиняється постійним струмом, значення якого дорівнює середньому

$$\bar{p}_{\max} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi^2 r_{A0}^2} \bar{I} + \delta p_{\max}. \quad (8)$$

Було отримано формули для залежностей надлишкового тиску δp_{\max} від параметрів (частоти та скважності імпульсів, співвідношення амплітуд) імпульсного струму. Показано, що змінюючи ці параметри, можна отримати тиск дуги, який відповідає вимогам технології.

При моделюванні динаміки зміни довжини дуги треба розглядати процеси нагрівання і плавлення електроду. Враховуючи нагрівання вильоту електроду (тобто частини електроду між струмопідвідним мундштуком і дугою) струмом, що протікає (для підвищення точності були враховані контактні явища між мундштуком і електродом), і нагрівання та плавлення торця електроду за рахунок виділення тепла в прианодній області, можна одержати вираз для швидкості плавлення електроду. Диференціальне рівняння для довжини дуги l виражає той факт, що швидкість її зміни є різницею між швидкістю плавлення та швидкістю подачі електроду v

$$\frac{dl}{dt} = \frac{SU_A i + \rho(l_w - l)i^2}{\gamma S^2 [c(T_{\text{melt}} - T_0) + \lambda]} - v, \quad (9)$$

де γ і ρ – густина і питома електропровідність електродного дроту, S – площа його поперечного перерізу, l_w – відстань між струмопідвідним мундштуком і виробом, c , λ і T_{melt} – питома теплоємність, питома теплота плавлення і температура плавлення металу електроду, U_A – прианодне (чи прикатодне) падіння напруги, T_0 – температура оточуючого середовища.

Диференційне рівняння (9) моделює динаміку довжини дуги і повинно використовуватись разом з рівняннями, породженими законами Кірхгофа, що описують електричне коло, і рівнянням узагальненої моделі дуги (3).

Наприклад, для дуги з плавким електродом, що включена в коло постійного струму з реактивним обмеженням, рівняння для кола має вигляд

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left(U_{xx} - R_s i - \rho \frac{l_w - l}{S} i - El \right), \quad (10)$$

де U_{xx} – напруга холостого ходу джерела живлення, R_s – опір баластного резистора і підвідних кабелів, L – індуктивність реактора, E – напруженість електричного поля у дузі (розглядається випадок безінерційної дуги, тобто $\theta = 0$).

Аналіз особливих точок системи диференціальних рівнянь (9) та (10) показує, що важливою є умова існування дуги

$$0 < l < l_w. \quad (11)$$

Ліва частина нерівності гарантує відсутність контакту електродного дроту і виробу, права – від відгорання електроду до струмопідвідного мундштука. Отже стаціонарна довжина дуги, що визначається коренями кубічного рівняння

$$\begin{aligned} & \rho E^2 l_0^3 + \rho(qv\gamma\rho - E(2U_{xx} + U_A + El_w))l_0^2 \\ & \dots + [\rho U_{xx}(U_{xx} + U_A + 2El_w) + (R_s S + \rho l_w)(EU_A - 2qv\gamma\rho)]l_0 + \dots \\ & \dots + qv\gamma(R_s S + \rho l_w)^2 - U_{xx}U_A(R_s S + \rho l_w) - \rho U_{xx}^2 l_w = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

повинна задовольняти нерівність (11).

Умова існування дуги (11) може бути записана для параметрів технологічного процесу. Наприклад, для існування дуги з плавким електродом швидкість подачі електродного дроту повинна лежати в межах

$$U_{xx} \frac{SR_s U_A + \rho l_w (U_{xx} + U_A)}{[c(T_{melt} - T_0) + \lambda] \gamma SR_s} > v > U_A \frac{U_{xx} - El_w}{[c(T_{melt} - T_0) + \lambda] \gamma SR_s}. \quad (13)$$

Було одержано статичну ВАХ дуги с плавким електродом. Показано, що при виборі масштабів: напруги El_w , струму $S\sqrt{qv\gamma/\rho l_w}$ ($q = c(T_{melt} - T_0) + \lambda$), функцію ВАХ можна представити однопараметричною функцією (див. рис.1):

$$u = 1 + \frac{p}{i} - \frac{1}{i^2}, \quad (14)$$

де i и u – масштабовані значення струму і напруги, а $p = U_A / \sqrt{qv\gamma\rho l_w}$ – єдиний безрозмірний параметр, який об'єднує в собі параметри дуги, електродного дроту і технологічні параметри процесу.

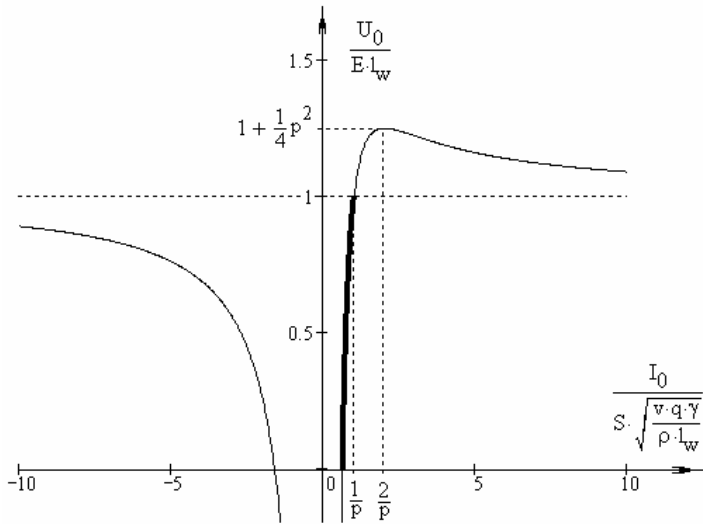


Рис.1. Загальний вигляд функції статичної вольтамперної характеристики дуги з плавким електродом. Жирна крива відповідає умові існування дуги.

Функція статичної ВАХ дуги з плавким електродом на відміну від статичної ВАХ дуги з неплавким електродом має зростаючий характер і існує лише в певних діапазонах зміни струму і напруги (рис.1, жирна крива).

Аналіз стійкості показав, що для всіх значень параметрів особливі точки завжди залишаються стійкими: або вузлами з аперіодичним перехідним процесом, або фокусами з коливальним перехідним процесом. Чисельний експеримент виявив, що при локальній стійкості електричного кола з дугою плавкого електроду перехідні процеси у динаміці

можуть виходити за межі границь існування дуги (11) і порушувати технологічний процес.

У **третьому розділі** проаналізовано електричні кола, що описуються двома диференціальними рівняннями. Вони включають лінійні елементи (резистори, реактори і конденсатори) і один нелінійний елемент – електричну дугу.

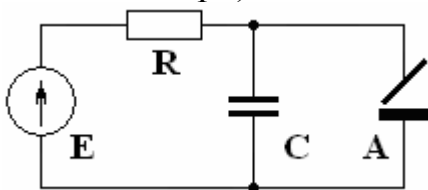


Рис.2. RC-коло з електричною дугою.

Було розглянуто два RC-кола з електричною дугою, які зводяться до аналізу кола, що зображене на рис.2. Система диференціальних рівнянь складається з рівняння, що відповідає закону Кірхгофа для вузла, і рівняння узагальненої моделі дуги (3)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} \left(E - u - Ri_{\theta} \frac{u}{U(i_{\theta})} \right); \quad \frac{di_{\theta}^2}{dt} = \frac{1}{\theta} i_{\theta}^2 \left[\left(\frac{u}{U(i_{\theta})} \right)^2 - 1 \right], \quad (15)$$

або в безрозмірному вигляді, коли масштаби напруг – U_0 , струмів – I_0 , опорів – U_0/I_0 , ємностей – $I_0/\theta U_0$, часу – θ , з урахуванням статичної ВАХ дуги у вигляді (2) і рівняння зв'язку $E = RI_0 + U_0$:

$$\dot{y} = \frac{1}{RC} \left(1 + R - yR - Ryz^{\frac{1-n}{2}} \right); \quad \dot{z} = y^2 z^{1-n} - z, \quad (16)$$

де y – безрозмірна напруга на конденсаторі, z – безрозмірний квадрат струму стану дуги.

Було проведено лінійний аналіз, що ґрунтується на проблемі власних значень. Система (16) має особливі точки, одна з яких при всіх значеннях параметрів кола залишається сідлом, тобто нестійкою особливою точкою. Тип іншої особливої точки S , що має координати (1,1), при зміні параметрів може еволюціонувати. При зміні параметра C еволюція має такі етапи: стійкий вузол – стійкий фокус – нестійкий фокус – нестійкий вузол (див. рис.3 і 4).

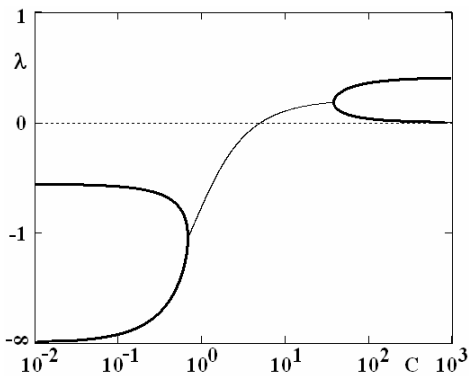


Рис.3. Залежність власних значень від параметра C для RC-кола з дугою. Тонка крива – дійсна частина власних значень.

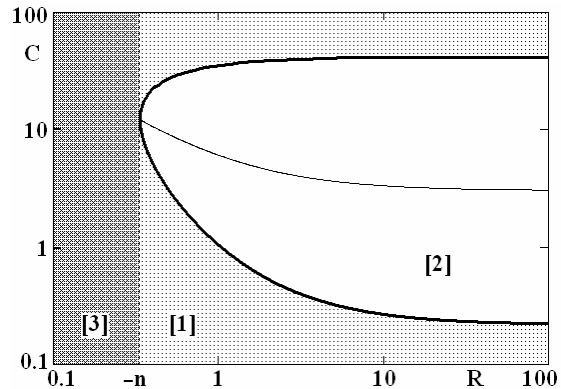


Рис.4. Области різних типів особливої точки S для RC-кола з дугою в площині (R, C) . Области: [1] – точка S вузол; [2] – фокус; [3] – сідло. Тонка крива – власні значення чисто уявні (біфуркація Хопфа).

З цих рисунків також видно, що особлива точка S при значенні параметра C

$$C_H = -\frac{1+R}{nR} \quad (17)$$

має чисто уявні власні значення, що відповідає біфуркації Хопфа. Але біфуркація Хопфа, тобто втрата особливою точкою локальної стійкості при взаємодії з граничним циклом, може бути двох типів: субкритична або суперкритична біфуркація Хопфа.

Субкритична біфуркація. Граничний цикл нестійкий і існує при значеннях біфуркаційного параметра менше критичного. При збільшенні параметра амплітуда його зменшується як корінь з підкритичності і при біфуркації граничний цикл зникає.

Суперкритична біфуркація. Граничний цикл стійкий. Він з'являється при біфуркації і амплітуда його при збільшенні параметра зростає як корінь з надкритичності.

Для потреб електротехніки більш привабливим видається другий тип, оскільки лише стійкий граничний цикл асоціюється із автоколиваннями в електричному колі.

Проведений нелінійний аналіз, що ґрунтується на теоремі про нормальні форми Пуанкаре, показав, що зміна типу біфуркації відбувається при значенні параметра R

$$R_{HS} = \frac{1-3n}{2}. \tag{18}$$

При значеннях $R < R_{HS}$ біфуркація Хопфа субкритична, тобто автоколивань не виникає. При значеннях $R > R_{HS}$ біфуркація Хопфа суперкритична, тобто в RC-колі з дугою виникають автоколивання.

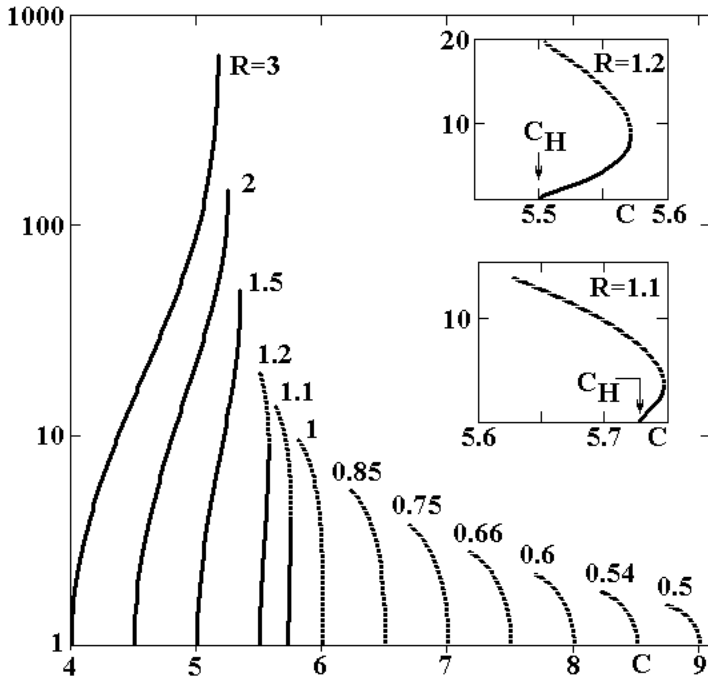


Рис.5. Залежність амплітуди граничних циклів від біфуркаційного параметра C для RC-кола з дугою. Суцільні лінії – стійкі граничні цикли (автоколивання), пунктирні лінії – нестійкі граничні цикли.

Застосування чисельних методів для дослідження RC-кола з дугою підтвердило результати аналітичних досліджень. Згідно з формулою (18) при $R=1$ для $n=-1/3$ відбувається зміна типу біфуркації Хопфа (див. рис.5). Чисельні методи дають можливість отримати більш повну картину. Було виявлено, що існує діапазон параметра R , у якому при одному і тому ж значенні параметра C в системі співіснують два граничних цикли (стійкий всередині нестійкого, рис.5). При подальшому зростанні біфуркаційного параметра амплітуда нестійкого циклу зменшується, а стійкого зростає. Існує певне значення параметра C , при якому стійкий і нестійкий цикли зливаються, знищуючи один одного. Це і є біфуркацією подвійного граничного циклу.

При великих значеннях параметра R автоколивання в RC-колі з дугою спостерігаються тільки в певному діапазоні зміни параметра C . Верхня межа цього діапазону визначається біфуркацією сепаратриси сідла.

Отже, за рахунок взаємодії інерційності дуги і інерційності конденсатора в електричних колах можуть виникати автоколивання.

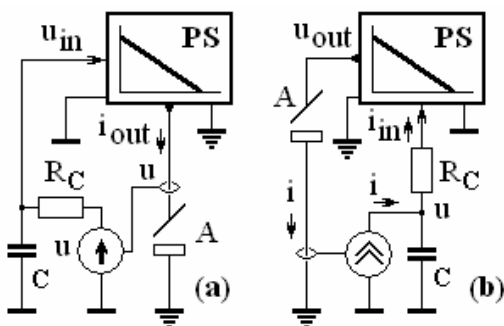


Рис.6. Електричні кола з дугою і зворотними зв'язками: a – джерело струму кероване напругою; b – джерело напруги кероване струмом; PS – силове джерело живлення.

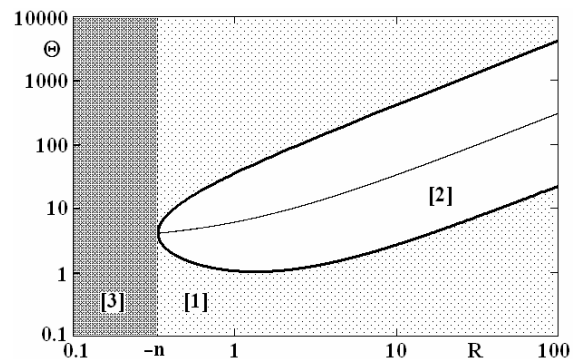


Рис.7. Области різних типів особливої точки S для RC-кола з дугою в площині (R, Θ) . Области: [1] – точка S вузол; [2] – фокус; [3] – сідло. Тонка крива – власні значення чисто уявні (біфуркація Хопфа).

Було встановлено, що інерційність дуги взаємодіє з інерційністю конденсатора, що знаходиться в колах зворотного зв'язку. На рис.6 представлено дві типові схеми джерел живлення дуги. Інерційність в колах зворотного зв'язку виникає за рахунок інерційності вимірювальних кіл, каналів обробки інформації і кіл керування. Вказана інерційність моделювалася $R_C C$ -ланцюжком (рис.6). Силове джерело живлення PS, яке формує лінійно падаючу зовнішню характеристику, може бути зроблене або як джерело струму кероване напругою, або як джерело напруги кероване струмом.

У першому випадку особлива точка залишається стійкою при всіх значеннях параметрів. У другому випадку тип особливої точки міг змінюватися і вона може ставати нестійкою.

Система диференціальних рівнянь у безрозмірній формі, що описує цю схему (рис.6b), має вигляд

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\Theta} \left[(1+R-Ry)z^{\frac{1-n}{2}} - y \right]; \quad \frac{dz}{d\tau} = \left[(1+R-Ry)^2 z^{-n} - 1 \right] z. \quad (19)$$

Інерційність характеризується параметром $\Theta = R_C C$. Із рис.7 видно, що тип особливої точки при збільшенні параметра Θ еволюціонує наступним чином: стійкий вузол – стійкий фокус – нестійкий фокус – нестійкий вузол. При значенні біфуркаційного параметра Θ

$$\Theta_H = -\frac{1+R}{n} \quad (20)$$

відбувається біфуркація Хопфа.

Нелінійний аналіз біфуркації Хопфа показав, що зміна типу біфуркації відбувається при тому ж значенні параметра R (18). Отже джерело живлення дуги зі зворотним зв'язком може демонструвати стійкість, локальну нестійкість (тобто автоколивання) і глобальну нестійкість. Два останні випадки можна вважати негативними явищами. Це потрібно враховувати при проектуванні джерел живлення електричної дуги.

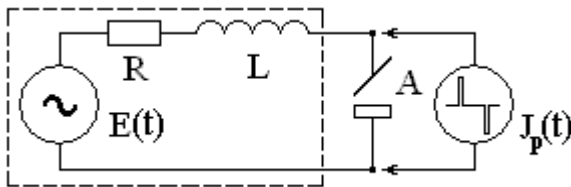


Рис.8. Схема джерела живлення змінного струму зі стабілізатором у вигляді ідеального джерела імпульсного струму.

напрузі холостого ходу джерела живлення дуга може згаснути. Щоб уникнути цього, застосовують різні методи (в багатьох випадках хімічні). Зупинимося на електротехнічному методі, який полягає в застосуванні стабілізуючих імпульсів. Імпульси створюються за допомогою конденсаторів. Але для спрощення будемо розглядати схему, коли імпульси створюються додатковим джерелом струму.

За допомогою розроблених чисельних методів для кіл змінного струму з дугою, що пов'язані з знаходженням періодичних розв'язків, були вивчені їх властивості. Було сформульовано і розв'язано задачу оптимізації. В якості критерію оптимізації обрано напругу холостого ходу джерела живлення, оскільки саме напругою визначається,

У третьому розділі також розглянуто кола змінного струму з дугою. Саме таким колам притаманна нестабільність, пов'язана з тим, що дуга при кожному переході струму через нуль охолоджується, а плазма розряду деіонізується. При зміні полярності виникають проблеми повторного запалювання дуги, при недостатній

наприклад, для трансформатора його маса і габарити. Варійованим параметром була різниця фаз між струмом основного джерела і імпульсного.

Існування мінімуму напруги холостого ходу свідчить про те, що задача оптимізації має розв'язок. Підкреслимо одну особливість. Як виявилось, значення мінімуму напруги холостого ходу для стабілізуючого імпульсу, полярність якого протилежна полярності струму дуги, менше за значення мінімуму для стабілізуючого імпульсу, полярність якого співпадає з полярністю струму дуги.

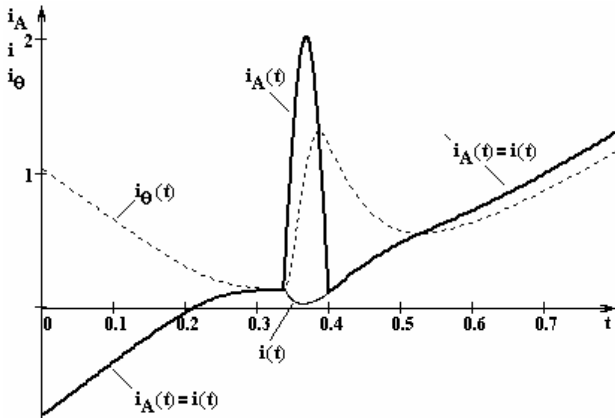


Рис.9. Часові залежності струмів на етапі подачі стабілізуючого імпульсу. Полярність імпульсу співпадає з полярністю струму дуги.

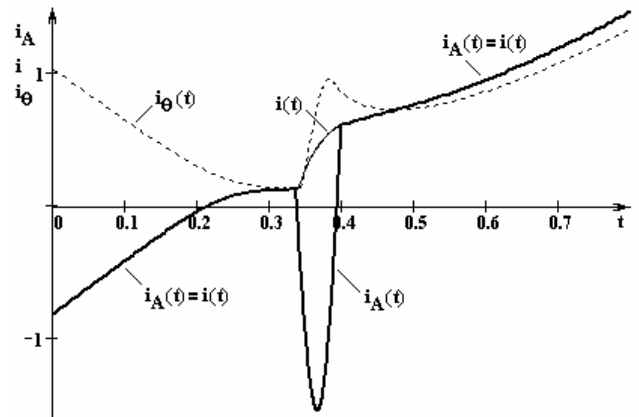


Рис.10. Часові залежності струмів на етапі подачі стабілізуючого імпульсу. Полярність імпульсу протилежна полярності струму дуги.

Як видно з рис.9, імпульс, полярність якого співпадає з полярністю струму дуги, призводить до зменшення струму $i(t)$ основного джерела живлення, що негативно позначається на процес повторного запалювання дуги по закінченню стабілізуючого імпульсу.

Стабілізуючий імпульс, полярність якого протилежна полярності струму дуги, призводить до підвищення струму $i(t)$ основного джерела живлення (див. рис.10). Тому після закінчення імпульсу саме основне джерело виконує роль стабілізуючого пристрою.

У **четвертому розділі** дисертації розглянуто RLC-кола з електричною дугою, які описуються трьома диференціальними рівняннями.

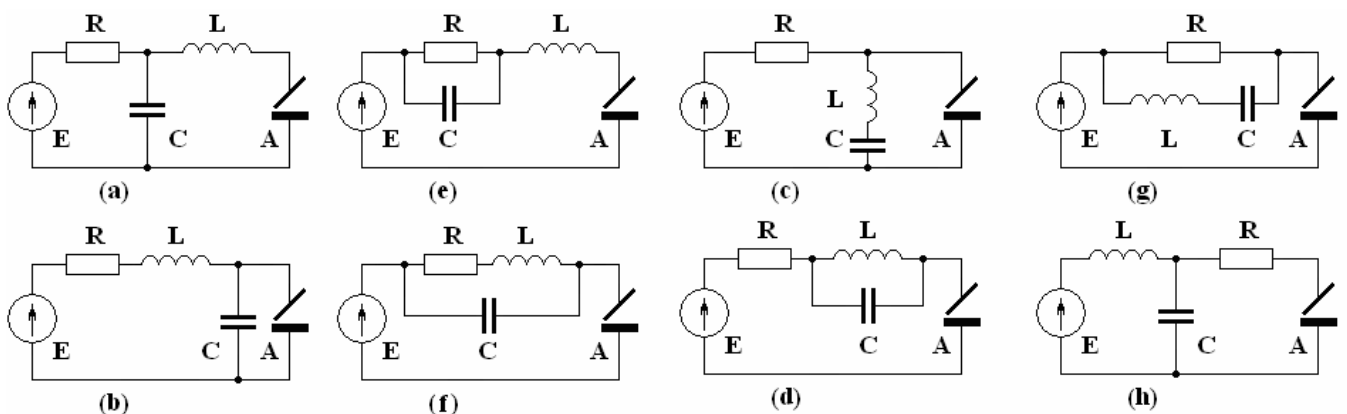


Рис.11. Електричні кола з дугою, які описуються трьома диференціальними рівняннями. Всі елементи кіл, крім дуги A , лінійні.

З набору лінійних елементів: джерела постійної напруги E , резистора R , конденсатора C , реактора L , та нелінійного елемента електричної дуги A можна

створити вісім роботоздатних електричних кіл (див. рис.11). Було показано, що аналіз чотирьох з них зводиться до аналізу інших чотирьох, а саме кола (е) до кола (а), (f) до (b), (g) до (c), (h) до (d). Отже, в подальшому аналізувалися тільки перша четвірка кіл.

RLC-коло з дугою (а), яка включена послідовно з реактором. Воно описується системою трьох диференціальних рівнянь, два з яких відповідають законам Кірхгофа для контуру і вузла, а третє є рівнянням узагальненої моделі дуги (3)

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left[u - \frac{U(i_\theta)}{i_\theta} i \right]; \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} (E - u - Ri); \quad \frac{di_\theta^2}{dt} = \frac{1}{\theta} (i^2 - i_\theta^2). \quad (21)$$

Ці рівняння можна записати у безрозмірному вигляді

$$\dot{x} = \frac{1}{L} \left(y - xz \frac{n-1}{2} \right); \quad \dot{y} = \frac{1}{RC} (1 + R - y - Rx); \quad \dot{z} = x^2 - z, \quad (22)$$

де x – безрозмірний струм реактора, y – безрозмірна напруга на конденсаторі, z – безрозмірний квадрат струму стану дуги. Всі масштаби величин, що використовувалися при приведенні системи до безрозмірного вигляду (масштаб індуктивності $U_0/\theta I_0$), а також припущення про вигляд статичної ВАХ дуги співпадають з тими, що використовувалися при аналізі RC-кола з дугою у третьому розділі.

Лінійний аналіз показав, що система (22) має особливі точки, одна з яких при всіх значеннях параметрів залишається сідлом, тобто нестійкою особливою точкою. Тип іншої точки S , що має координати (1,1,1), при зміні параметрів може еволюціонувати. При зміні параметра C еволюція має такі етапи: стійкий вузол – стійкий фокус – (стійкий вузол – стійкий фокус) – нестійкий фокус – нестійкий вузол. За допомогою аналізу лінеаризованої системи (22) в околі особливої точки S було визначено, що при значенні біфуркаційного параметра C , яке є додатнім коренем квадратного рівняння

$$nR^2(1+L)C_H^2 + R[(1+L)^2 + R]C_H + L(1+L+R) = 0, \quad (23)$$

має місце біфуркація Хопфа.

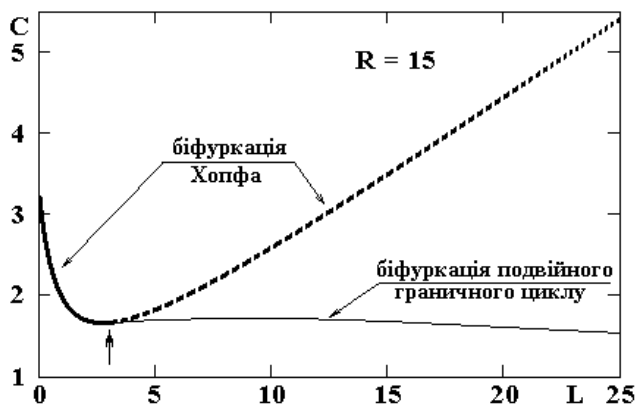


Рис.12. Розбиття кривої біфуркації Хопфа на ділянки з різними типами. Пунктирна крива – субкритична, суцільна – суперкритична, суцільна тонка – біфуркація подвійного граничного циклу.

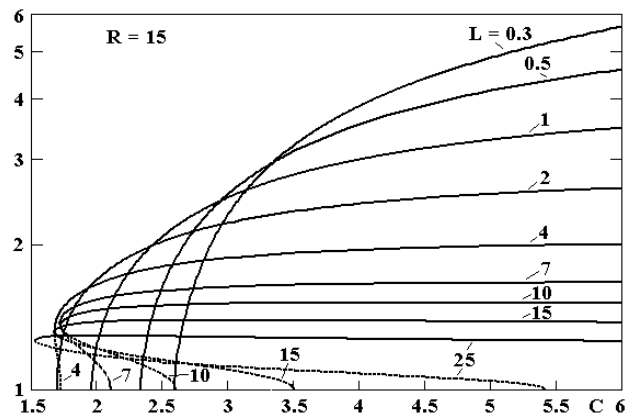


Рис.13. Залежність амплітуди змінної z від біфуркаційного параметра C . Пунктирні криві – нестійкі граничні цикли, суцільні – стійкі граничні цикли.

Нелінійний аналіз показав, що біфуркація Хопфа може бути як субкритичною, так і суперкритичною, тобто в RLC-колі з дугою (а) можливе виникнення автоколивань. Це проілюстровано на рис.12 (точка зміни типу біфуркації позначена стрілкою). Чисельний аналіз підтвердив вищесказане. Він також більш детально висвітлив процеси, що відбуваються при зміні параметрів кола. При великих значеннях параметра L при одному значенні біфуркаційного параметра C співіснують два граничних цикли: нестійкий всередині стійкого. Ці цикли з'являються в результаті біфуркації подвійного граничного циклу і з ростом параметра C амплітуда нестійкого зменшується, а амплітуда стійкого зростає (див. рис.13). Отже, автоколивання в RLC-колі з дугою (а) виникають м'яко (з нульовою амплітудою) в результаті біфуркації Хопфа, або жорстко (з ненульовою амплітудою) в результаті біфуркації подвійного граничного циклу.

Незалежно від механізму виникнення автоколивань при подальшому збільшенні параметра C їх еволюція якісно однакова.

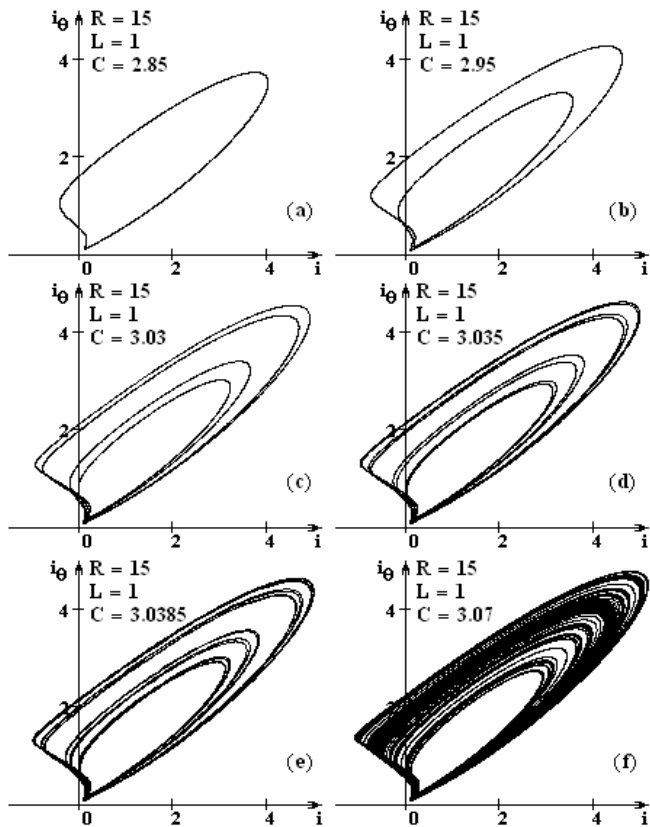


Рис.14. Фазові портрети автоколивань при різних значеннях біфуркаційного параметра C , що ілюструють каскад біфуркацій подвоєння періоду і дивний аттрактор: (а) – коливання з періодом $1T$, (b) – $2T$, (c) – $4T$, (d) – $8T$, (e) – $16T$, (f) – дивний аттрактор.

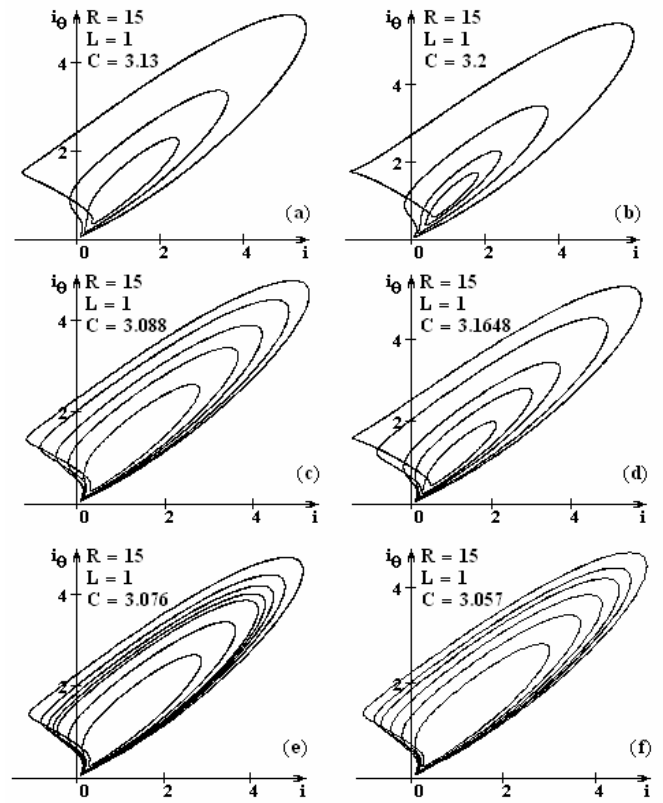


Рис.15. Фазові портрети автоколивань при різних значеннях біфуркаційного параметра C , що ілюструють вікна періодичності в детермінованому хаосі: (а) – вікно періодичності з періодом $3T$, (b) – $4T$, (c) – $5T$, (d) – $5T$, (e) – $7T$, (f) – $6T$.

При певному значенні біфуркаційного параметра граничний цикл періоду $1T$ втрачає стійкість і з'являється стійкий граничний цикл періоду $2T$, тобто період автоколивань подвоюється. Далі граничний цикл періоду $2T$ втрачає стійкість і з'являється стійкий граничний цикл періоду $4T$, тобто період автоколивань знову

подвоюється. Таким чином відбувається так званий нескінчений каскад біфуркацій подвоєння періоду по наступній схемі

$$1T \rightarrow 2T \rightarrow 4T \rightarrow 8T \rightarrow 16T \rightarrow \dots \rightarrow 2^k T \rightarrow \dots \quad (24)$$

Декілька перших етапів каскаду показані на рис.14а-е. Нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду призводить до появи дивного аттрактора (рис.14f), який є образом детермінованого хаосу, тобто неперіодичних автоколивань, у фазовому просторі. Підкреслимо, що суть терміну „детермінований хаос” полягає в тому, що детермінована система (у нашому випадку RLC-коло з дугою), тобто система з наперед визначеними параметрами (без внесення хаотичної компоненти ні через силове збурення, ні через параметри) демонструє автоколивання, подібні до шумових.

На початковому етапі розвитку дивний аттрактор має вигляд стрічкового дивного аттрактора. Він складається з вузьких стрічок, які в результаті так званого „зворотного” каскаду біфуркацій подвоєння зливаються в більш широкі. При подальшому збільшенні параметра C дивний аттрактор стає гвинтовим, який щільно покриває фазовий простір.

Дослідження детермінованого хаосу показали, що він неоднорідний по своїй структурі. У хаосі спостерігаються так звані вікна періодичності. Кратність періоду вікон не співпадає з законом подвоєння (24) (рис.15).

RLC-коло з дугою (b), коли реактор включений послідовно з резистором. Три диференціальні рівняння, що описують це коло, мають вигляд

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - u - Ri); \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \left[i - \frac{i_\theta}{U(i_\theta)} u \right]; \quad \frac{di_\theta^2}{dt} = \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\frac{u}{U(i_\theta)} \right]^2 - 1 \right\} i_\theta^2, \quad (25)$$

або у безрозмірному вигляді

$$\dot{x} = \frac{1}{L}(1 + R - Rx - y); \quad \dot{y} = \frac{1}{C} \left[x - yz^{\frac{1-n}{2}} \right]; \quad \dot{z} = y^2 z^{1-n} - z. \quad (26)$$

Припущення і позначення в (25) та (26) залишаються з попередньої задачі.

Тип особливої точки S , що має координати (1,1,1), при зміні параметрів може еволюціонувати. При зміні параметра C еволюція має такі етапи: стійкий вузол – стійкий фокус – (стійкий вузол – стійкий фокус) – нестійкий фокус – нестійкий вузол. За допомогою лінійного аналізу системи (26) в околі особливої точки S визначено, що при значенні біфуркаційного параметра C , яке є одним з коренів квадратного рівняння

$$nR(R + nL)C_H^2 + (R^2 + 2nRL + R + nL^2)C_H + L(1 + L + R) = 0, \quad (27)$$

має місце біфуркація Хопфа.

Нелінійний аналіз показав, що біфуркація Хопфа може бути як субкритичною, так і суперкритичною, тобто в RLC-колі з дугою (b) можливе виникнення автоколивань. Це ілюструє рис.16 (точка зміни типу біфуркації позначена стрілкою). Чисельний аналіз підтвердив вищесказане. Крім того з його допомогою було встановлено, що при великих значеннях параметра L при одному і тому ж значенні біфуркаційного параметра C співіснують два або три граничних цикли. Ці цикли

з'являються і зникають в результаті біфуркації подвійного граничного циклу (рис.17). Отже, автоколивання в RLC-колі з дугою (b) виникають м'яко (з нульовою амплітудою) в результаті біфуркації Хопфа.

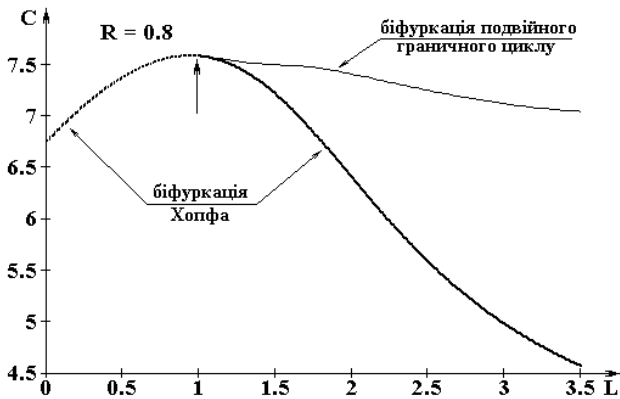


Рис.16. Розбиття кривої біфуркації Хопфа на ділянки з різними типами.

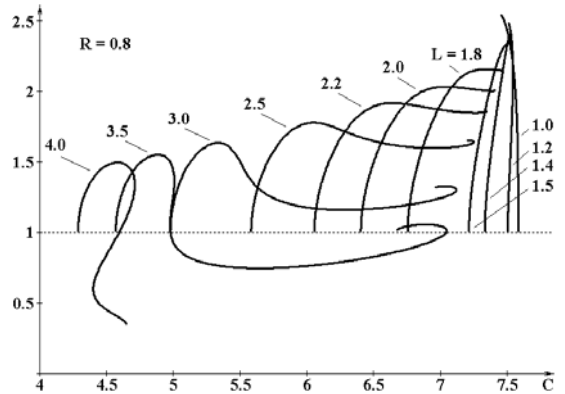


Рис.17. Залежність амплітуди змінної z від біфуркаційного параметра C .

Автоколивання при зростанні біфуркаційного параметра C проходять етап нескінченного каскаду біфуркацій подвоєння періоду (24) (рис.18) з утворенням дивного аттрактора (рис.19).

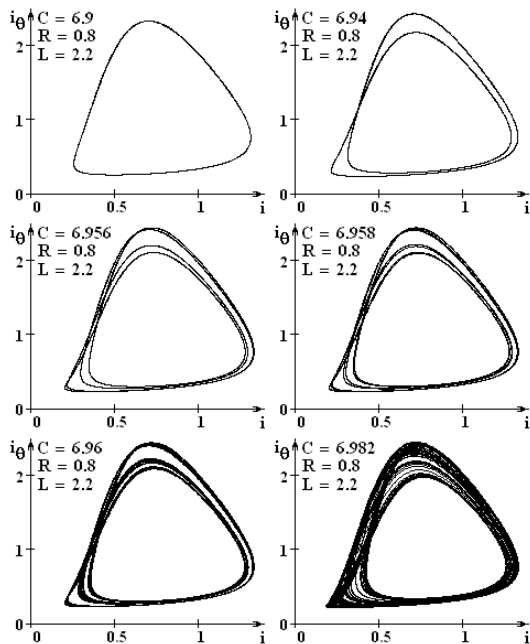


Рис.18. Фазові портрети автоколивань при різних значеннях біфуркаційного параметра C , що ілюструють каскад біфуркацій подвоєння періоду і дивний аттрактор.

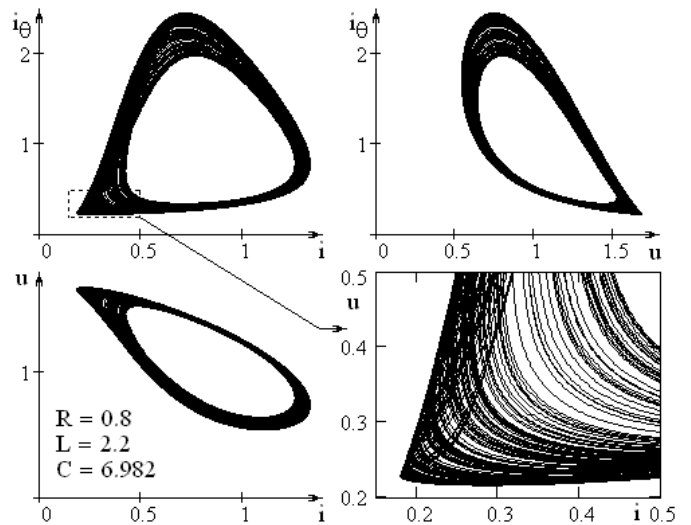


Рис.19. Фазовий портрет дивного аттрактора: (a) – проєкція на площину (i, i_θ) , (b) – проєкція на площину (u, i_θ) , (c) – проєкція на площину (u, i) .

RLC-коло з дугою (c), коли реактор включений послідовно з конденсатором. Воно описується системою трьох диференціальних рівнянь

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left[U(i_\theta) \frac{E - Ri}{Ri_\theta + U(i_\theta)} - u \right]; \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i; \quad \frac{di_\theta^2}{dt} = \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\frac{E - Ri}{Ri_\theta + U(i_\theta)} \right]^2 - 1 \right\} i_\theta^2, \quad (28)$$

яка у безрозмірній формі має вигляд

$$\dot{x} = \frac{1}{L} \left(\frac{1+R-Rx}{R+z^2} z^{\frac{n-1}{2}} - y \right); \quad \dot{y} = \frac{1}{C} x; \quad \dot{z} = \left(\frac{1+R-Rx}{R+z^2} \right)^2 - z. \quad (29)$$

Результати лінійного аналізу системи (29) мало відрізняються від результатів аналізу системи (22). Відмінність лише в тому, що особлива точка S має координати (0,1,1), а біфуркація Хопфа відбувається при значенні біфуркаційного параметра

$$C_H = -\frac{1+R}{n[R+L(R+n)]}. \quad (30)$$

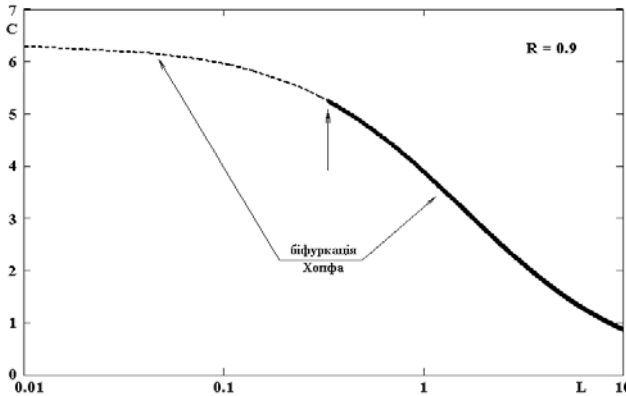


Рис.20. Розбиття кривої біфуркації Хопфа на ділянки з різними типами.

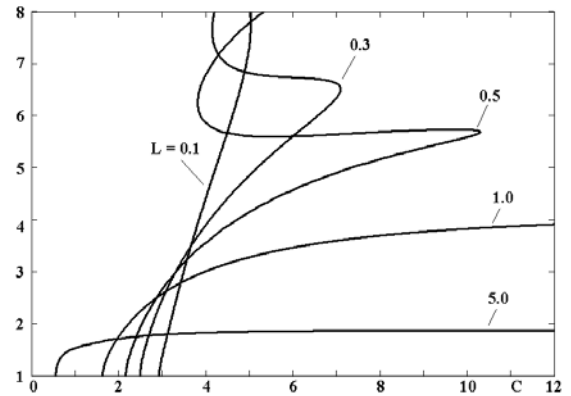


Рис.21. Залежність амплітуди змінної z від біфуркаційного параметра C .

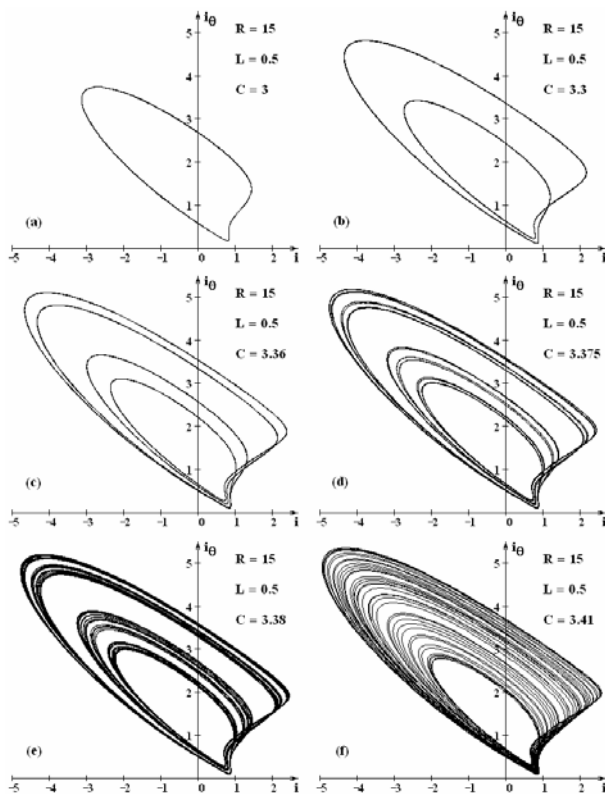


Рис.22. Фазові портрети автоколиваний, що ілюструють каскад біфуркацій подвоєння періоду і дивний аттрактор.

дивного аттрактора (рис.22f).

Нелінійний аналіз показав, що біфуркація Хопфа може бути як субкритичною, так і суперкритичною, тобто в RLC-колі з дугою (с) можливе виникнення автоколиваний. Це ілюструє рис.20 (точка зміни типу біфуркації позначена стрілкою). Чисельний аналіз підтвердив вищесказане. При малих значеннях параметра L при одному і тому ж значенні біфуркаційного параметра C співіснують два або три граничних цикли. Ці цикли з'являються і зникають в результаті біфуркації подвійного граничного циклу (рис.21). Отже в RLC-колі з дугою (с) можливі автоколивання, що з'являються м'яко, тобто з нульовою амплітудою, в результаті біфуркації Хопфа.

Автоколивання при зростанні біфуркаційного параметра C проходять етап каскаду біфуркацій подвоєння періоду (24) (рис.22а-е) з утворенням

RLC-коло з дугою (*d*), яка включена послідовно з резистором. Система трьох диференціальних рівнянь, що описує це коло має вигляд

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}u; \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \left[\frac{E-u}{Ri_{\theta} + U(i_{\theta})} i_{\theta} - i \right]; \quad \frac{di_{\theta}^2}{dt} = \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\frac{E-u}{Ri_{\theta} + U(i_{\theta})} \right]^2 - 1 \right\} i_{\theta}^2, \quad (31)$$

або у безрозмірній формі

$$\dot{x} = \frac{1}{L}y; \quad \dot{y} = \frac{1}{C} \left(\frac{1+R-y}{R+z^{\frac{n-1}{2}}} - x \right); \quad \dot{z} = \left(\frac{1+R-y}{R+z^{\frac{n-1}{2}}} \right)^2 - z. \quad (32)$$

Тип особливої точки *S* системи (32), що має координати (1,0,1), при зміні параметрів може еволюціонувати. При зміні параметра *C* еволюція має етапи, послідовність яких не збігається з послідовністю, що спостерігалася в попередніх задачах: стійкий вузол – стійкий фокус – (стійкий вузол – стійкий фокус). За допомогою лінійного аналізу системи (32) в околі особливої точки *S* можна впевнитися, що біфуркація Хопфа в цьому колі не має місця ні при яких значеннях параметрів. Чисельний аналіз підтвердив, що автоколивань в *RLC*-колі з дугою (*d*) не виникає.

За результатами, одержаними в четвертому розділі, можна зробити висновок, що наявність у нелінійному електричному колі елемента з падаючою вольтамперною характеристикою є необхідною, але не достатньою умовою виникнення автоколивань.

У **п'ятому розділі** увагу було сконцентровано на вивченні властивостей детермінованого хаосу, що був описаний в попередньому розділі. Всі результати цього розділу стосуються *RLC*-кола з дугою (рис.11а).

Дослідження детермінованого хаосу за допомогою побудови фазових портретів пов'язано з аналізом великого об'єму інформації. Тому для вивчення періодичних і хаотичних коливань доцільно використати метод побудови біфуркаційних діаграм, у якому по осі абсцис відкладають значення біфуркаційного параметра, а по осі ординат – координати точок перерізу Пуанкаре.

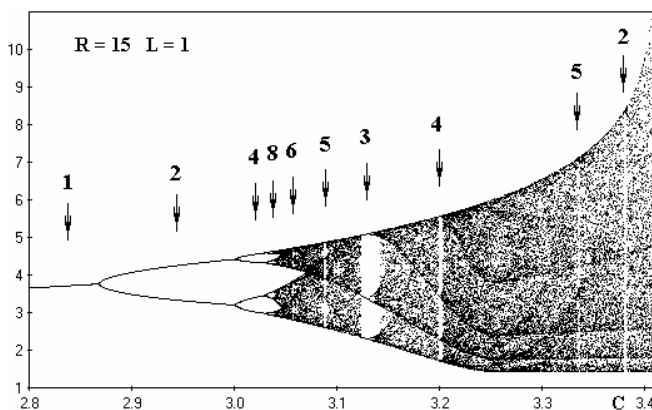


Рис.22. Біфуркаційна діаграма *RLC*-кола з дугою при $R = 15$, $L = 1$. Стрілки – періодичні коливання; числа – кратність періоду.

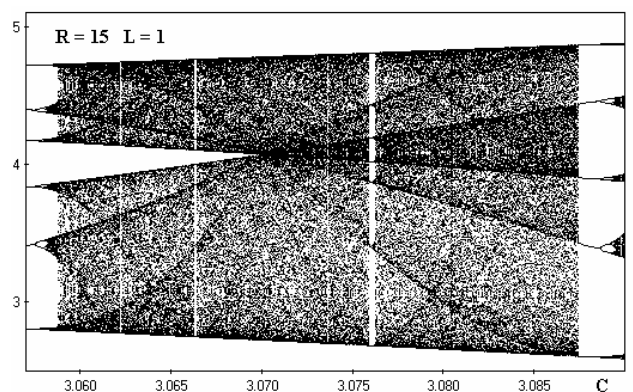


Рис.23. Біфуркаційна діаграма *RLC*-кола з дугою при $R = 15$, $L = 1$ з добре видимими вікнами періодичності 6T, 5T та 7T (деталізація рис.22).

На біфуркаційній діаграмі чітко видно (рис.22): каскад біфуркацій подвоєння періоду, зони стрічкового та гвинтового хаосу, вікна періодичності. При збільшенні

масштабу по осі абсцис можна виявити окремі деталі, наприклад, вузькі вікна періодичності (рис.23).

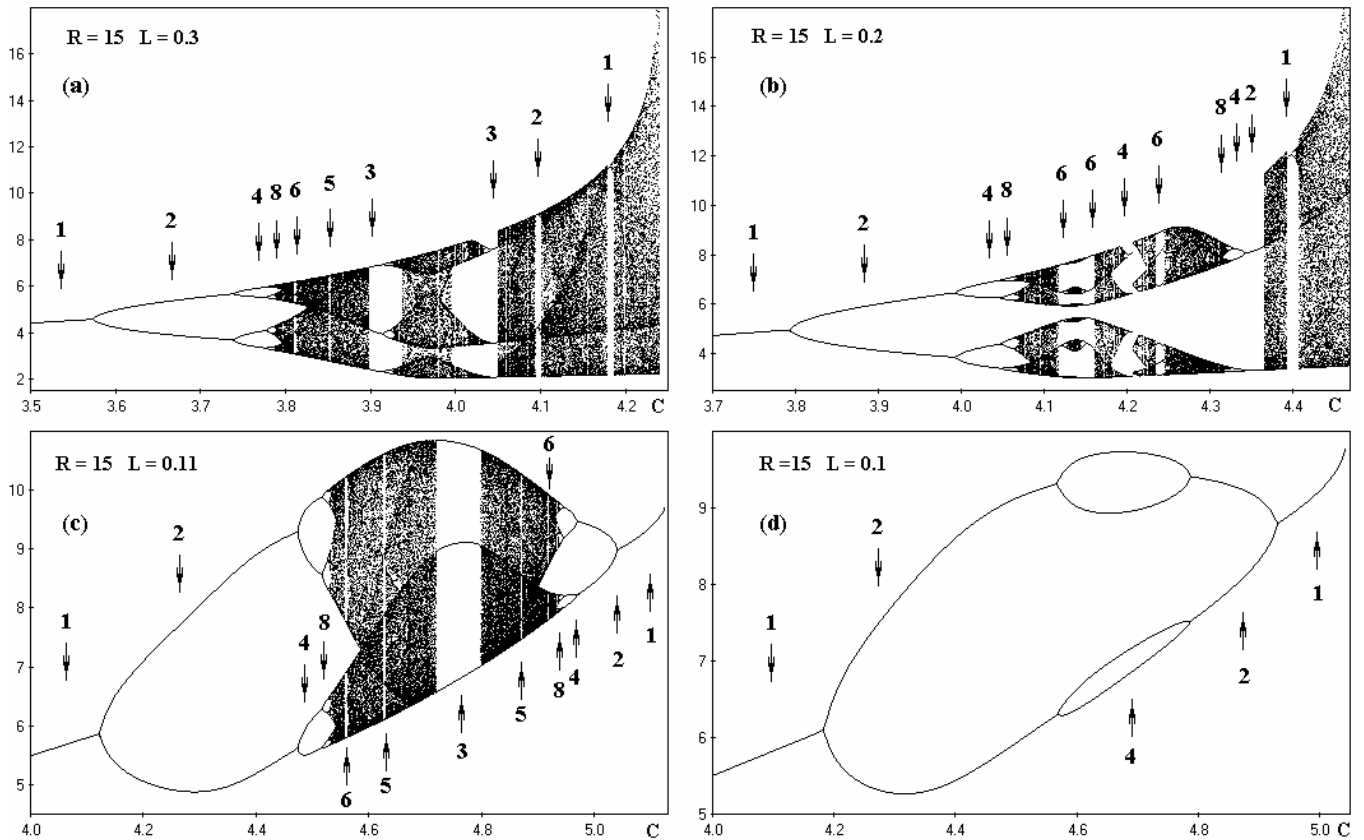


Рис.24. Біфуркаційні діаграми RLC-кола з дугою при $R = 15$, $L = 0.3$ (a); $L = 0.2$ (b); $L = 0.11$ (c); $L = 0.1$ (d). Стрілки вказують періодичні коливання; числа – кратність періоду.

Якщо біфуркаційна діаграма при $R = 15$, $L = 1$ подібна до класичних біфуркаційних діаграм, то при інших значеннях параметрів було виявлено велике розмаїття відмінностей (рис.24). При $R = 15$, $L = 0.3$ спостерігалися дзеркально розташовані два вікна періоду $3T$ (рис.24a). При $R = 15$, $L = 0.2$ виявлено, що останні дві стрічки стрічкового хаосу не зливаються, а перехід до гвинтового хаосу відбувається жорстко (рис.24b). При $R = 15$, $L = 0.11$ спостерігалися дзеркально розташовані два каскади біфуркацій подвоєння періоду (рис.24c). При $R = 15$, $L = 0.1$ виявлено скінчений каскад біфуркацій подвоєння періоду (рис.24d).

Аналізуючи велику кількість отриманих біфуркаційних діаграм з їх складністю і різноманітністю було помічено, що вони складаються з елементарних структур, яким притаманні властивості подібності (рис.26), самоподібності та масштабної інваріантності (рис.25). Цей факт дає можливість провести класифікацію елементарних структур біфуркаційних діаграм.

Класифікація проводилась по двох фізичних властивостях:

- м'якість або жорсткість виникнення хаосу або періодичності;
- зворотність або незворотність процесу при збільшенні і зменшенні біфуркаційного параметру.

При такому підході було виявлено всього три елементарних структури з наступними властивостями:

- м'якість і зворотність (рис.26і);

- жорсткість і незворотність (рис.26ii);
- жорсткість і зворотність (рис.26iii).

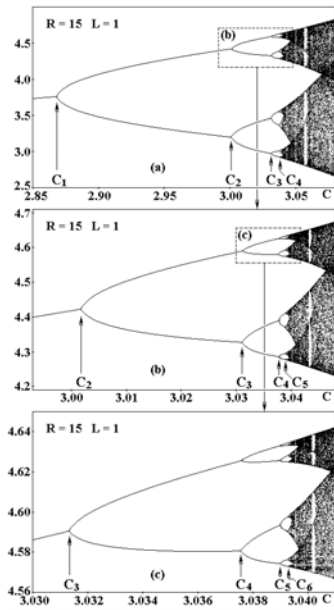


Рис.25. Біфуркаційні діаграми RLC-кола з дугою при $R = 15, L = 1$, що демонструють властивості масштабної інваріантності.

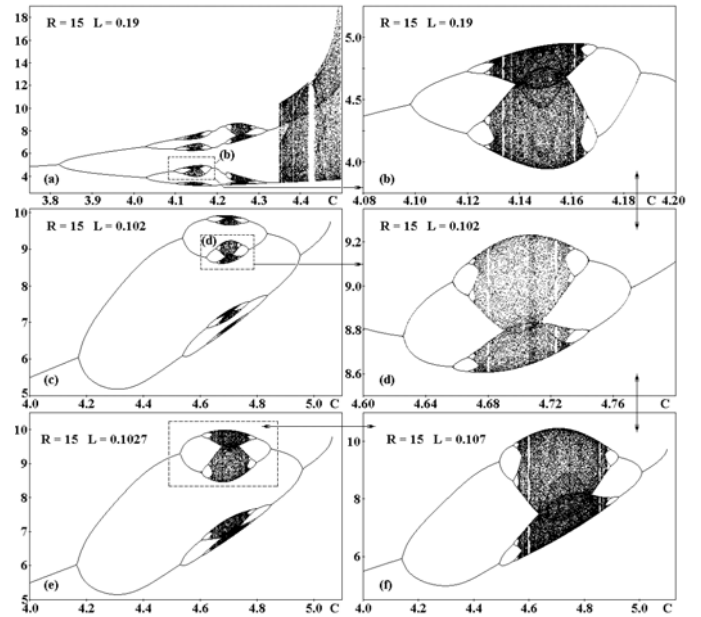


Рис.26. Біфуркаційні діаграми RLC-кола з дугою при $R = 15$, що демонструють властивість подібності.

Структура з властивостями м'якості і зворотності. Структура (i) добре відома і розповсюджена структура каскаду біфуркацій подвоєння періоду. Вона може починатися або суперкритичною біфуркацією Хопфа (як, наприклад, у RLC-колі з дугою при малих значеннях параметру L), або біфуркацією подвоєння періоду – тоді вона є вкладеною структурою (наприклад, кожна наступна гілка біфуркаційного дерева на рис.26i є подібною до попередньої). Властивість м'якості означає, що всі періодичні коливання при біфуркаціях подвоєння породжуються з нульовою амплітудою, а в точці накопичення біфуркацій подвоєння, не зважаючи на те, що стався перехід до хаосу, потужність хаотичної компоненти рівна нулю. При зворотній зміні біфуркаційного параметра процеси відбуваються у зворотному порядку. Це свідчить про властивість зворотності.

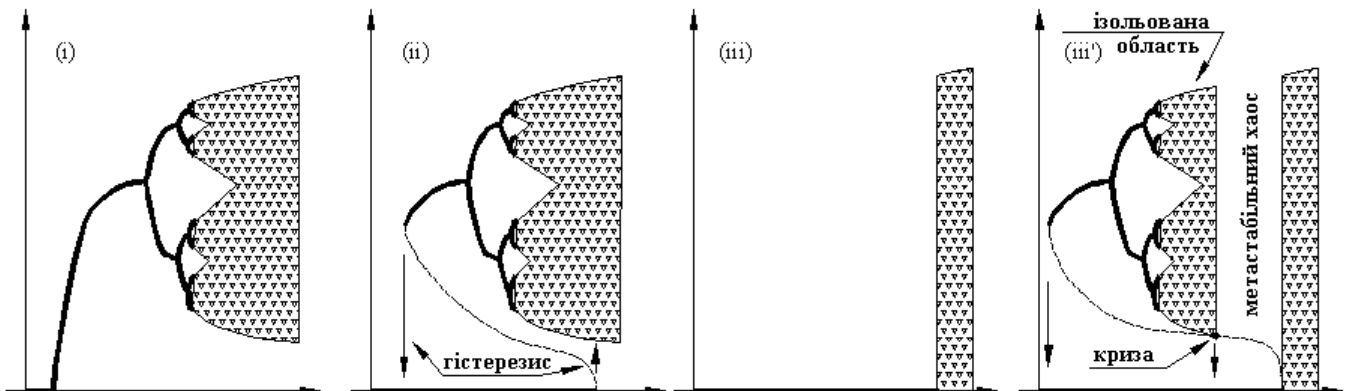


Рис.26. Три основні структури біфуркаційних діаграм.

Структура з властивостями жорсткості і незворотності. Структура (ii)

відрізняється від структури (i) тим, що при деяких значеннях біфуркаційного параметра система бістабільна, тобто в ній співіснують два аттрактори. Між ними знаходиться репелер (нестійкий граничний цикл, тонка крива на рис.26ii), який є границею басейнів тяжіння аттракторів. В системі проявляється один із аттракторів, в той час як розвиток іншого при зміні параметра залишається непомітним. На границях зони бістабільності відбувається злиття репелера з одним із аттракторів і їх взаємне знищення, що проявляється у вигляді переходу до аттрактору, який лишився. Так проявляється гістерезис елементарної структури (ii). Підкреслимо, що переходи при різних напрямках зміни біфуркаційного параметра відбувається в різні напрямки.

При подальшому збільшенні біфуркаційного параметра розвиток хаосу у структурах (ii) и (i) співпадають. Однак, якщо зменшувати біфуркаційний параметр, то процес піде по іншому шляху, який співпадає з другим аттрактором, і будуть спостерігатися ті області біфуркаційної діаграми, які не спостерігались при збільшенні біфуркаційного параметра (гістерезис). Каскад біфуркацій подвоєння періоду відбувається у зворотному порядку. Останньою біфуркацією, при якій зникає аттрактор, є біфуркація подвійного граничного циклу.

Структура з властивостями жорсткості і зворотності. Структура (iii) зовні нагадує структуру (ii), однак вона має суттєву відмінність. Границя дивного аттрактора перетинається з репелером. Басейни тяжіння двох аттракторів перекриваються (рис.26iii), що призводить до кризи дивного аттрактора. Хаотичний аттрактор, з яким виникла криза, в конкуренції з періодичним аттрактором втрачає свою властивість притягувати. Здійснюється перехід до періодичного («більш стійкого») аттрактора і виникає зона метастабільного хаосу. Властивість хаотичного аттрактора притягувати відновлюються тільки тоді, коли репелер зникає, зливаючись з періодичним аттрактором в результаті біфуркації подвійного граничного циклу, яка призводить до другої кризи.

Ізольовані області біфуркаційних діаграм. У структурі (iii) є область (рис.26iii'), яка обмежена з одного боку біфуркацією подвійного граничного циклу, а з другого – кризою дивного аттрактора. Було показано, що цю область не можна виявити, оскільки переходи, які відбуваються в системі при збільшенні і зменшенні біфуркаційного параметра, відбуваються в одному напрямку (на відміну від гістерезису, коли переходи відбуваються у різні напрямки) і природнім шляхом потрапити в ізольовану область неможливо.

Однак, навіть якщо коливання в системі відповідають ізольованій області, будь-яка зміна параметра призводить до переходу в неізольовану область.

Знання про елементарні структури та ізольовані області дозволяють знаходити їх на біфуркаційних діаграмах, що і було зроблено для RLC-кола з електричною дугою.

Складчаста структура періодичних розв'язків. На рис.27 представлено характерну залежність амплітуди граничного циклу періоду $1T$ від біфуркаційного параметра C , одержану для RLC-кола з дугою. Наявність трьох ділянок залежності з різними властивостями складає основну її особливість. На першій ділянці залежність однозначна, тобто одному значенню біфуркаційного параметра відповідає один граничний цикл. Друга ділянка відповідає багатозначній залежності,

в межах якої одному значенню біфуркаційного параметра відповідає декілька граничних циклів (на рис.27 їх сім). Причому граничні цикли, що відповідають аттракторам, чергуються з граничними циклами, що відповідають репеллерам, утворюючи складчасту структуру. На третій ділянці граничні цикли відсутні.

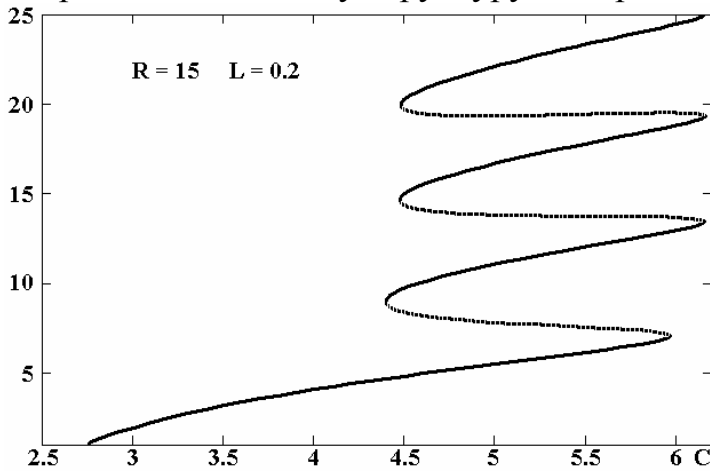


Рис.27. Залежність амплітуди граничного циклу періоду 1Т від біфуркаційного параметра C . Суцільна лінія – ділянки аттрактора, пунктирна лінія – ділянки репелера.

Формування складчастої структури демонструє рис.28. Складки утворюються поступово при зростанні параметра L . При малих значеннях параметра L функція залежності амплітуди змінної i_0 від біфуркаційного параметра C монотонна. При збільшенні параметра L на цій функції з'являються складки, а розмір ділянки багатозначності зростає з ростом L .

Було встановлено, що складчасті структури періодичних розв'язків 1Т и 2Т взаємодіють особливим чином.

Наявністю складок пояснюється присутність на біфуркаційній діаграмі періодичного вікна 1Т. Перша ліва складка (див. рис.29) відповідає цьому вікну. Це спостерігається тільки при $L < 0.8$. При значеннях параметра $L > 0.8$ першою лівою складкою є складка розв'язку з подвійним періодом, а отже вікно періодичності в хаосі буде мати кратність 2Т.

При рості параметра L від 0.06, коли права складка 1Т виникає, до 0.8 значення біфуркаційного параметра C , що відповідає цій складці, також зростає. А потім прямує до нескінченності. На її місці з'являється права складка періодичного розв'язку 2Т, абсциса якої зменшується при подальшому зростанні параметра L . Абсциси лівої складки 1Т і лівої складки 2Т, на яку заміняється складка 1Т, при зростанні параметра L зменшуються. Отже, перехід від складки 1Т до складки 2Т майже непомітний.

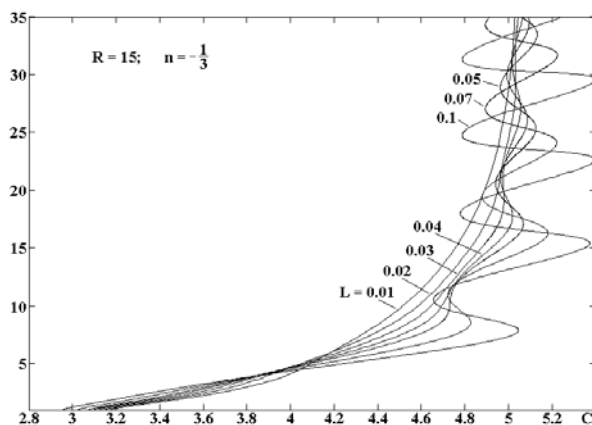


Рис.28. Сімейство залежностей амплітуди граничних циклів від біфуркаційного параметра C при малих значеннях параметра L .

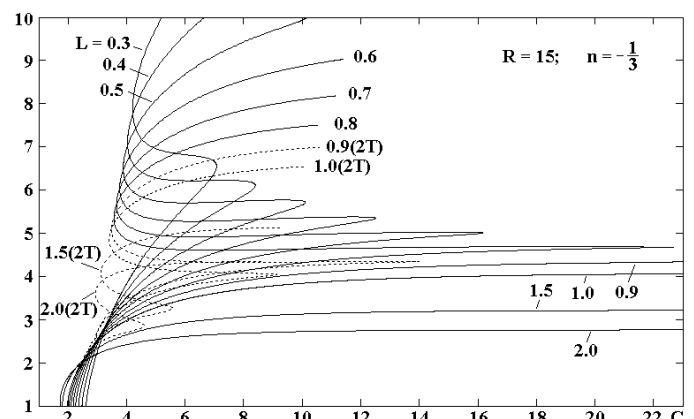


Рис.29. Перехід складки граничного циклу 1Т (суцільна лінія) в складку граничного циклу 2Т (пунктирна лінія).

Основні властивості характеристичних ліній біфуркаційних діаграм. На біфуркаційних діаграмах RLC-кола з дугою в хаотичній області присутня неоднорідність покриття площини точками. Ці неоднорідності формуються вздовж деяких ліній. Такі ж лінії присутні на біфуркаційних діаграмах так званого логістичного відображення, яке являє собою квадратичну функцію з максимумом.

При дослідженні логістичного відображення було виявлено два типи характеристичних ліній: гілки та лінії відображення екстремуму. Визначено, що властивості біфуркаційних діаграм залежать від поведінки цих ліній. Біфуркаційні діаграми функцій відображення якісно подібні біфуркаційним діаграмам нелінійних систем, що описуються диференціальними рівняннями.

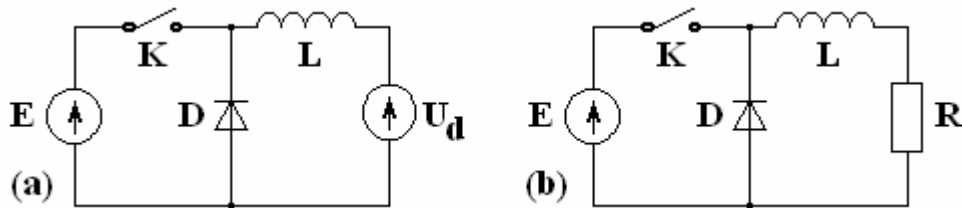


Рис.30. Ключові кола з дугою, яка моделюється проти-ЕРС (а) та резистором (б).

Детермінований хаос в ключових електричних колах. При моделюванні ключових електричних кіл з дугою було визначено, що біфуркаційні діаграми відрізняються від біфуркаційних діаграм RLC-кола з дугою, що описані раніше. Для того, щоб з'ясувати причини цих відмінностей були проведені спрощення. Дуга моделювалась або як проти-ЕРС, або як резистор (рис.30).

При алгоритмі комутації, коли ключ вмикається періодично, а вимикається по рівню струму, можна аналітично одержати функції відображення.

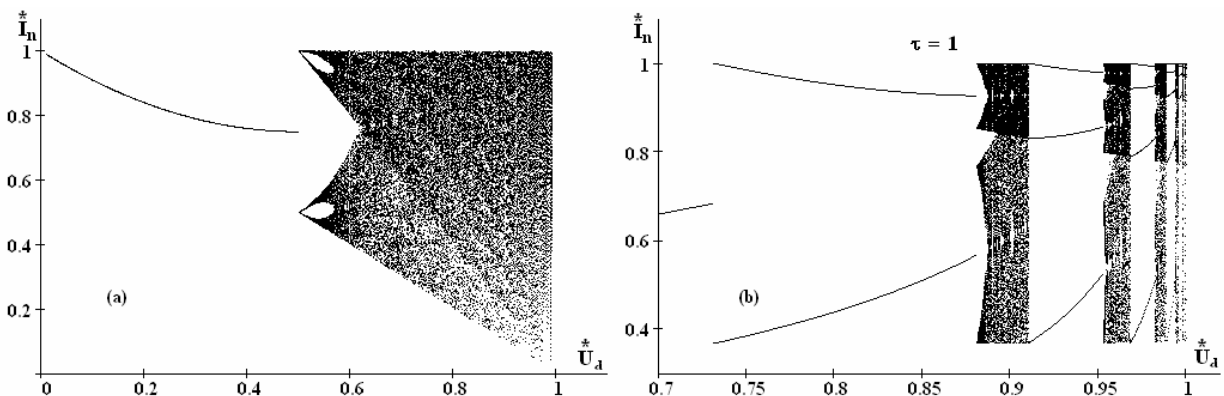


Рис.31. Біфуркаційні діаграми ключових кіл з дугою, яка моделюється проти-ЕРС (а) та резистором (б).

Вони мають кусково-лінійний вигляд. Відмінність полягає в тому, що зростаюча ділянка для кола з проти-ЕРС паралельна бісектрисі кута між осями. За допомогою діаграми Ламерея були відтворені біфуркаційні діаграми (рис.31). Відмінність біфуркаційних діаграм полягає в наступному: перша не має жодного вікна періодичності, на другій кратність вікон періодичності зростає згідно натурального ряду. Отже, алгоритм комутації може бути причиною детермінованого хаосу. Перспективно знайти функцію відображення для RLC-кола з дугою, яка б значно спростила дослідження, що й було зроблено в наступному підрозділі.

Різницеве рівняння для нелінійного кола з електричною дугою. Було висунуто

припущення, що RLC-коло з дугою може описуватися одним різницеvim рівнянням

$$x_{k+1} = f(x_k, C), \quad (33)$$

де k – номер кроку ітерації, C – біфуркаційний параметр. Функція, що входить в рівняння (33), визначалась за допомогою перерізу Пуанкаре. Фіксували одну з координат точки перерізу, а потім будували залежність координати наступної точки від попередньої.

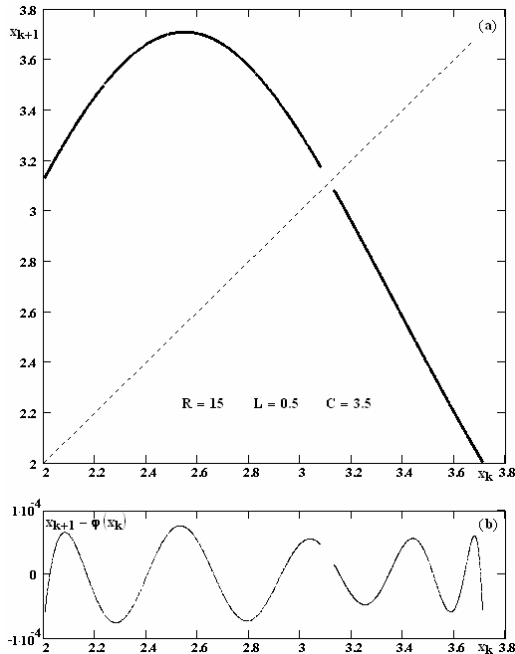


Рис.32. Функції відображення (а) електричного кола з дугою на початковому етапі розвитку хаотичних коливань ($R = 15, L = 0,5, C = 3,5$) і її відхилення (б) від апроксимації степеневим рядом; x – значення змінної i_θ при $i = 1$.

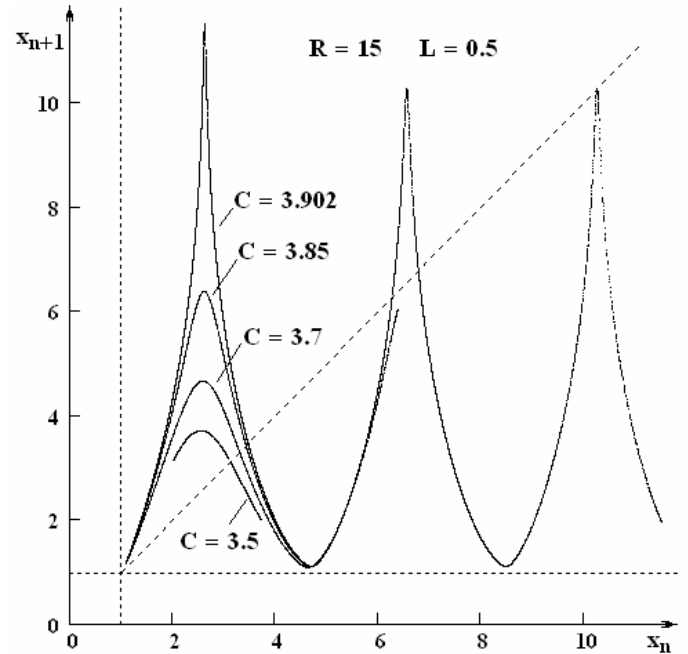


Рис.33. Сімейство функцій відображення при $R = 15, L = 0,5$.

На рис.32а приведені результати такої побудови. По вкрай малому відхиленні множини точок від апроксимуючого полінома (рис.32б) зроблено висновок, що всі точки лежать на одній кривій, яка близька до параболи з максимумом. Ця крива подібна до кривої логістичного відображення.

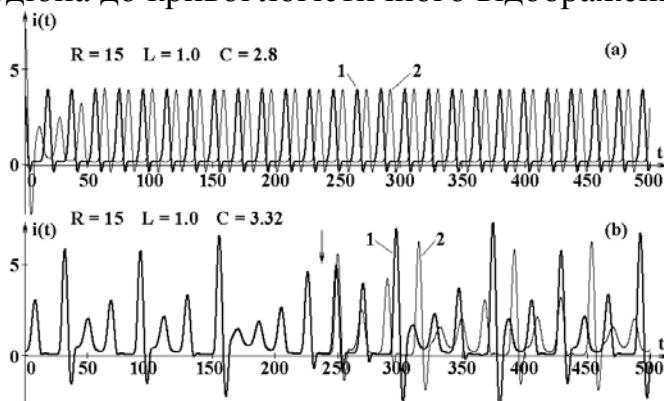


Рис.34. Часові залежності струму реактора: а) періодичні коливання; б) хаотичні коливання; 1 – незбурені коливання; 2 – збурені коливання.

Така форма кривої спостерігається тільки на початкових етапах розвитку хаосу. При збільшенні біфуркаційного параметра форма кривої поблизу максимуму змінюється на більш загострену. Окрім того послідовно проявляються наступні мінімуми та максимумами. Крива поблизу максимумів має таку ж загострену форму, як і поблизу першого, але максимумами лежать на нижчому рівні. Мінімуми лежать на одному

рівні, а крива поблизу їх зберігає форму, близьку до параболи.

Одержані функції відображення для RLC-кола з дугою відкривають широкі перспективи спрощення досліджень, бо замінюють складну процедуру чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь простою ітераційною процедурою.

Критерії детермінованого хаосу. Оскільки на сьогоднішній день дослідники нелінійних динамічних систем не прийшли до висновку, який же критерій детермінованого хаосу найбільш вагомий, було перевірено чотири критерії.

Критерій 1. Надзвичайна чутливість до початкових умов. Для перевірки цього критерію був проведений чисельний експеримент. Періодичні та хаотичні коливання в RLC-колі з дугою збурювались по початкових умовах. Збурення періодичного коливання за декілька періодів зникало і коливання нічим іншим, окрім фази, не відрізнялись від незбурених (рис.34a). Відмінність збурених (на 0,1%) хаотичних коливань багатьох періодів не проявляється, але, починаючи із деякого моменту часу (на рис.34b відмічено стрілкою), вона різко наростає. І врешті-решт збурене хаотичне коливання значно відрізняється від незбуреного. Це свідчить про надзвичайну чутливість до початкових умов.

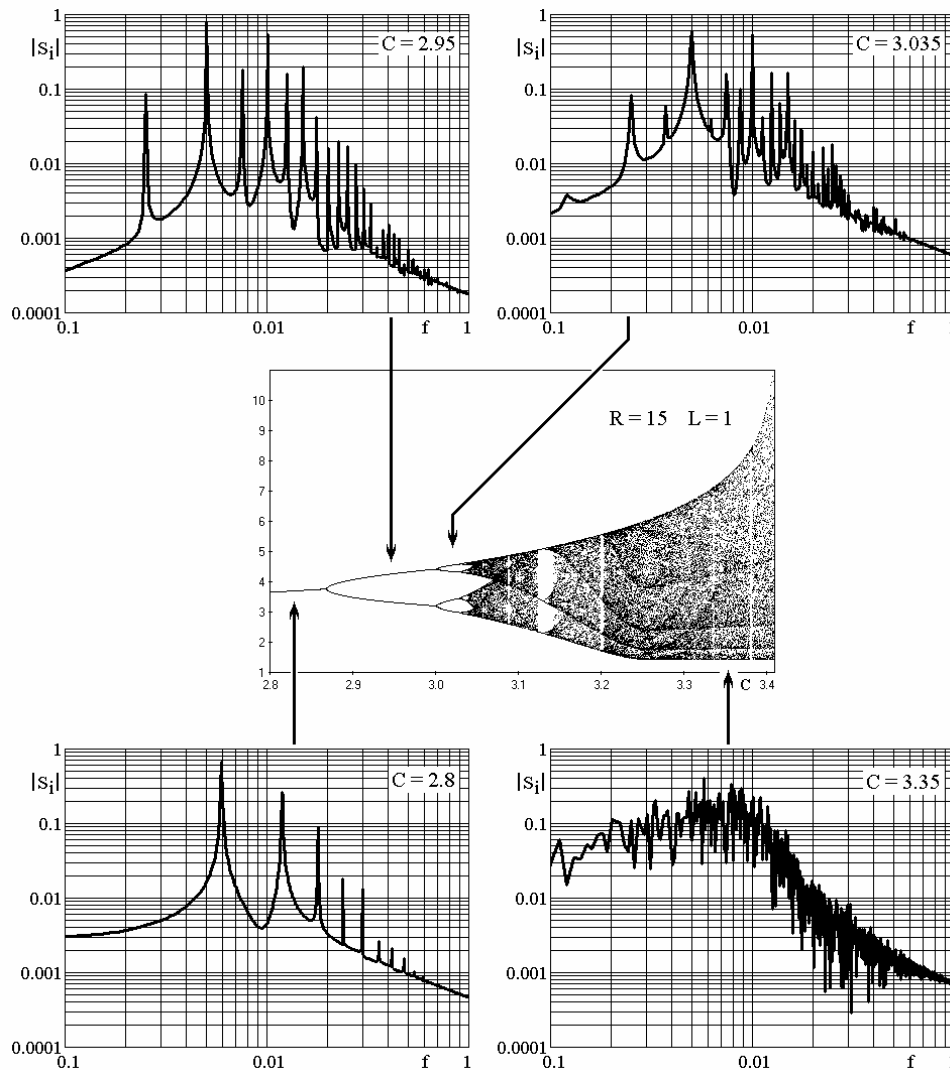


Рис.35. Частотні спектри коливань. Стрілками вказані області біфуркаційної діаграми, для яких характерний такий частотний спектр коливань .

Критерій 2.

Суцільний шумоподібний частотний спектр. Досліджувався частотний спектр коливань незалежної змінної i (струм реактора). Для його знаходження застосовувалось комплексне перетворення Фур'є (за алгоритмом так званого швидкого перетворення Фур'є).

В області періодичних коливань частотний спектр має вигляд окремих піків, які відповідають основній частоті автоколивань та вищим гармонікам (правий нижній спектр на рис.35). Після кожної біфуркації подвоєння періоду з'являються нові піки, що відпо-

відають субгармонікам (верхні спектри на рис.35).

В області хаотичних коливань спостерігали суцільний частотний спектр (лівий нижній спектр на рис.35), який нагадує суцільні спектри шумових коливань.

Критерій 3. Показники Ляпунова. Показники Ляпунова характеризують стійкість траєкторій у фазовому просторі. Якщо один з показників додатний, то це не тільки свідчить про нестійкість системи по Ляпунову, але є критерієм детермінованого хаосу. Для обчислення повного спектра показників Ляпунова застосовувався алгоритм, в якому розв'язують основну задачу, інтегруючи систему диференціальних рівнянь, а поведінку малих збурень знаходять шляхом одночасного інтегрування так званої системи у варіаціях. Щоб збурення не ставали надмірно великими, періодично їх ортонормують за допомогою процедури ортогоналізації Грама-Шмідта.

На рис.36 представлено результати розрахунку показників Ляпунова. Для наочності на цьому ж рисунку зображено біфуркаційну діаграму електричного кола з дугою.

Як видно з рис.36, в хаотичних областях перший показник Ляпунова додатний ($\Lambda_1 > 0$), в періодичних областях, включаючи вікна періодичності, перший показник Ляпунова від'ємний ($\Lambda_1 < 0$). Другий показник Ляпунова залишається від'ємним ($\Lambda_2 < 0$) у всьому діапазоні зміни біфуркаційного параметра C .

Цей критерій є кількісним і, як вважають деякі дослідники, «служить строгим критерієм "дивності" аттрактора».

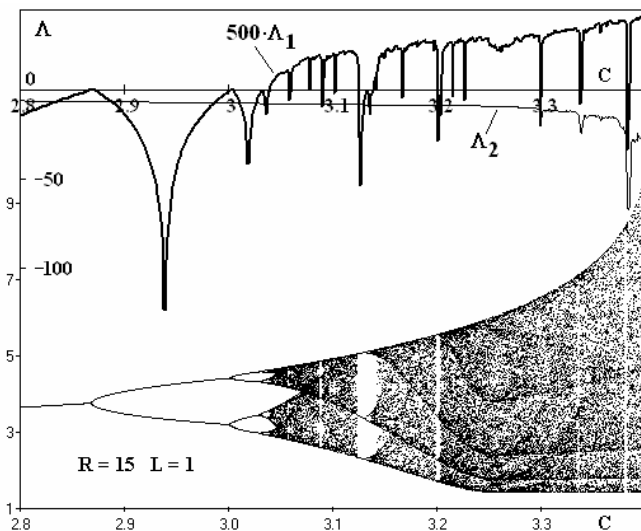


Рис.36. Залежність показників Ляпунова від біфуркаційного параметра C для RLC-кола з дугою.

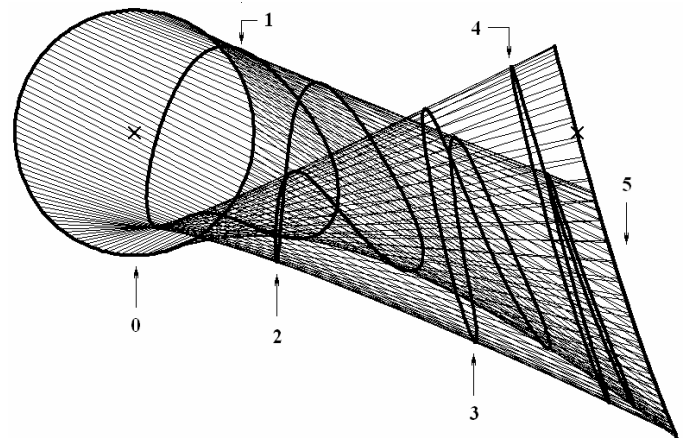


Рис.37. Еволюція кола траєкторій у фазовому просторі з етапами формування „підкови”. Етапи 0 та 5 співпадають

Критерій 4. Підкова Смейла. Був проведений чисельний експеримент з метою вивчення еволюції траєкторій, початкові умови яких лежать на колі, протягом періоду хаотичних коливань в електричному колі з дугою. Було визначено, що коло траєкторій через період перетворюється у відрізок. Було встановлено, що на проміжних етапах еволюції коло траєкторій деформується і утворює підкову.

У шостому розділі описані розроблені автором методи і методики, що застосовувались при дослідженні електричних кіл з дугою.

Проблема власних значень. При вивченні динаміки нелінійних електричних кіл часто виникає задача дослідження залежності власних значень лінеаризованої задачі від параметрів кола. Зокрема, це знаходження самих власних значень, а у більш загальному випадку побудова в площині параметрів кривих кратних власних значень, що з електротехнічної точки зору відповідає границям аперіодичного та коливального перехідних процесів, а з математичної – зміні типу особливої точки вузол-фокус або вузол-вузлофокус. Безперечний інтерес представляє також знаходження умов біфуркації Хопфа, тобто переходу від локальної стійкості до локальної нестійкості, що з математичної точки зору відповідає чисто уявним власним значенням.

Один з запропонованих автором аналітичних методів знаходження кратності і чистої уявності власних значень базується на використанні так званого результанта. Це дискримінант матриці, в яку певним чином входять коефіцієнти двох поліномів. Рівність результанта нулю є умовою існування загального кореня цих поліномів. Для умови кратності загальний корінь мають характеристичний поліном і похідна від нього по власному значенню. Для умови чистої уявності загальний корінь мають дійсна та уявна частини характеристичного полінома при підстановці в нього чисто уявного власного значення.

Був запропонований аналітичний метод знаходження параметричних залежностей, що відповідають кратності та чистій уявності власних значень. В якості параметра виступають: для умови кратності саме кратне власне значення, яке в цьому випадку є дійсним числом; для умови чистої уявності – уявна частина власного значення, яка є додатнім числом.

Параметризація умови чистої уявності власних значень, яка є однією з умов біфуркації Хопфа, дозволила модернізувати існуючий аналітичний метод дослідження типів цієї біфуркації.

Модернізація методу визначення типу біфуркації Хопфа. Біфуркація Хопфа, тобто втрата особливою точкою локальної стійкості, може відбуватися за допомогою двох механізмів. Або при взаємодії особливої точки з нестійким граничним циклом (субкритична біфуркація Хопфа), або при взаємодії особливої точки з стійким граничним циклом (суперкритична біфуркація Хопфа). Розрізняти ці типи дуже важливо з точки зору електротехніки. При суперкритичній біфуркації Хопфа в електричному колі м'яко виникають автоколивання. При субкритичній біфуркації Хопфа або система стає глобально нестійкою, як в RC-колі з дугою, або в електричному колі жорстко виникають автоколивання, як в RLC-колі з дугою (а).

Існуюча методика, що ґрунтується на теоремах про центральний багатовид і про нормальні форми Пуанкаре, дуже складна в реалізації. Вихідна система диференціальних рівнянь спочатку перетворюється при заміні одних незалежних змінних на інші, а тільки потім знаходяться тензори других і третіх похідних перетвореної системи по нових змінних, які в подальшому використовуються при обчисленні індексу Флоке. Саме знак цього індексу і вказує на тип біфуркації Хопфа.

Було розроблено методику, яка дозволяє користуватися тензорами других і третіх похідних вихідної системи по початковим змінним, що значно спрощує процес символічних обчислень і дає можливість одержати аналітичні залежності

індексу Флоке для електричних кіл з дугою від параметрів.

Запропонована методика тестувалася і дозволила одержати результати як в задачах електротехніки, так і в задачах, що виникають в інших областях знань.

Модифікація методу багатократної стрільби. Для знаходження залежностей амплітуд періодичних розв'язків від параметра застосовувався метод стрільби. Однією з переваг цього методу є можливість отримати як стійкі, так і нестійкі розв'язки. Його суть полягає у зведенні задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь до крайової задачі. Особливістю крайової задачі в застосуванні до періодичних розв'язків є тотожність країв, тобто розв'язків через період. Ця тотожність зводить задачу до знаходження розв'язків системи нелінійних рівнянь, невідомими в якій є всі координати, крім заданої, і тривалість періоду. Для розв'язання цієї системи застосовувався метод Ньютона-Рафсона, який потребує визначення похідних від незалежних змінних по початкових умовах. Ці похідні знаходились шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь у варіаціях.

Для методу стрільби з'являються нездоланні перешкоди, коли тривалість періоду зростає, що спостерігається, наприклад, при каскаді біфуркацій подвоєння періоду. Був запропонований метод багатократної стрільби, в якому траєкторія розбивається на просторові інтервали, які визначаються поверхнею перерізу Пуанкаре.

Запропонований метод багатократної стрільби дозволив дослідити кількісні властивості каскаду біфуркацій подвоєння періоду. Вивчення динамічних систем різної природи показало, що перші різниці біфуркаційних значень каскаду біфуркацій подвоєння періоду утворюють геометричну прогресію, знаменник якої є універсальним числом, так званою константою Фейгенбаума

$$\delta = \underline{4.6692016091029906715\dots} \quad (34)$$

За допомогою запропонованого методу багатократної стрільби вдалося прослідкувати сім біфуркацій подвоєння періоду та одержати константу, що характеризує каскад біфуркацій подвоєння періоду в RLC-колі з дугою, яка збігається з константою (34) п'ятьма цифрами (у формулі виділено).

Інтервальна розмірність точкових множин перерізів Пуанкаре. Нові ідеї геометрії, пов'язані з фракталами, знаходять все більше застосування при дослідженні динамічних систем. Фрактальна розмірність є важливою характеристикою різних динамічних процесів. Вона дозволяє одержувати не тільки якісну, але й кількісну інформацію про аттрактори і детермінований хаос.

До недоліків відомих розмірностей можна віднести труднощі їх обчислення: дуже великі затрати часу, обробку величезних масивів даних, а також те, що їх алгоритми не враховують збіг точок точкової множини. Збіг точок на перетині Пуанкаре аттрактора означає наявність періодичних коливань.

Було запропоновано інтервальну розмірність, яка обчислюється за формулою

$$d_{\text{int}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \left[\frac{L_p}{\rho_{\min}(n)} \right]}, \quad (35)$$

де n – число точок перерізу Пуанкаре, L_p – характерний поперечний розмір перерізу

Пуанкаре, $\rho_{\min}(n)$ – мінімальна відстань (інтервал) між точками перерізу Пуанкаре, що визначається після кожного нового перетину траєкторією аттрактора поверхні Пуанкаре.

Було перевірено, що інтервальні розмірності для точкових аналогів класичних фрактальних об'єктів (множина Кантора, крива Коха, килим Серпінського) обчислені за формулою (35) дають значення, які співпадають з відомими.

При визначенні розмірності перерізу Пуанкаре дивного аттрактора RLC-кола з дугою використовувалась функція відображення, яка була знайдена в п'ятому розділі. Одержана інтервальна розмірність (при $R = 15$; $L = 0,5$; $C = 3,85$)

$$d_{\text{int}} = 0.479336 \quad (36)$$

має дробове значення. Саме це свідчить, що дивний аттрактор RLC-кола з дугою є фрактальним об'єктом.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано наукову проблему детермінованого хаосу в колах з електричною дугою на базі математичного апарату, який було розроблено для дослідження нелінійних електричних кіл з урахуванням нових підходів, пов'язаних з біфуркаціями, нестійкостями та фрактальними властивостями цих кіл. Отримані в дисертації результати у сукупності складають суттєвий внесок у подальший розвиток теорії нелінійних електричних кіл і полягають у наступному:

1. Розширено область застосування узагальненої моделі дуги на опис динаміки геометричних розмірів дуги: довжини та радіуса стовпа, що дозволило розв'язувати задачі акустичної і динамічної силової дії дуги, а також вивчати електричну дугу з плавким електродом.
2. В RC-колах з електричною дугою можливі як суперкритична, так і субкритична біфуркації Хопфа. Результатом суперкритичної біфуркації Хопфа є виникнення автоколивань в RC-колах з електричною дугою.
3. Нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду в RLC-колі з дугою призводить до появи дивного аттрактора, тобто неперіодичних автоколивань, які називаються детермінованим хаосом. Тип дивного аттрактора може бути гвинтовим або стрічковим.
4. Наявність в електричному колі нелінійного елемента з падаючою вольтамперною характеристикою, що притаманно електричній дузі, є необхідною, але не достатньою умовою виникнення автоколивань та існування детермінованого хаосу.
5. Класифікація елементарних структур біфуркаційних діаграм RLC-кола з дугою повинна ґрунтуватися на властивостях подібності, самоподібності та масштабної інваріантності цих структур.
6. Дві фізичні властивості – м'якість або жорсткість виникнення, зворотність або незворотність процесу при інверсній зміні біфуркаційного параметра – дозволяє

виділити три типові елементарні структури біфуркаційних діаграм. За допомогою виявленої складчастої структури періодичних розв'язків для RLC-кола з дугою знайдено ізольовані області біфуркаційних діаграм.

7. Динаміка нелінійних кіл з електричною дугою описується одним різницеvim рівнянням, що дає незаперечні переваги при дослідженні в порівнянні з описом трьома диференціальними рівняннями.
8. Наявність каскаду біфуркацій подвоєння періоду є необхідною, але не достатньою умовою виникнення та існування детермінованого хаосу. Виконання сукупності чотирьох критеріїв свідчить, що складні коливання, які спостерігаються в нелінійних колах з електричною дугою, є детермінованим хаосом.
9. Знаменник геометричної прогресії, яку складає ряд перших різниць значень біфуркаційних параметрів, що відповідає каскаду біфуркацій подвоєння періоду в RLC-колі з електричною дугою, з високою точністю збігається з константою Фейгенбаума. Високу точність забезпечує запропонований метод багатократної стрільби, оскільки він ґрунтується на розбитті періоду коливань на просторові інтервали.
10. Дивний аттрактор RLC-кола з дугою має дробову інтервальну розмірність. Це вказує на те, що він є фрактальним об'єктом.
11. На основі проведених досліджень розроблено науково обґрунтовані рекомендації щодо вибору схем при проектуванні джерел живлення електричної дуги із зворотними зв'язками. Результати досліджень кіл змінного струму з дугою дали можливість запропонувати нові схеми джерел живлення з використанням конденсаторів. Явище детермінованого хаосу в електричних колах з дугою знайде застосування при створенні нових дугових технологій, зокрема нових зварювальних технологій.
12. Результати роботи, а саме математичні моделі та програмне забезпечення, будуть використані при розробці джерел живлення електричної дуги, а також в процесі підготовки спеціалістів (магістрів та аспірантів) за спеціальностями «Промислова електроніка» та «Зварювання та споріднені процеси і технології» в Національному технічному університеті „КПІ” і в ІЕЗ ім. Є. О. Патона.

ОСНОВНІ ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Пентегов И.В. Оценка интенсивности звучания электрической сварочной дуги. /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец //Автоматическая сварка. – 1992. – №11-12. – С.28-31
2. Пентегов И.В. Силовое воздействие дуги при учете ее динамики /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец //Автоматическая сварка. – 1993. – №12. – С.27-31.
3. Сидорец В.Н. Особенности бифуркации Хопфа в нелинейных цепях с электрической дугой. /В.Н.Сидорец //Электронное моделирование. – 2008. – Т.30, №4. – С.3-19.

4. Пентегов И.В. Хаотические колебания в RLC-цепи с электрической дугой. /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец //Доклады АН Украины. – 1992, №10, – С.87-90.
5. Сидорец В.Н. Возникновение и структура странного аттрактора в RLC-цепи с электрической дугой. /В.Н.Сидорец, И.В.Пентегов //Техническая электродинамика. – 1993. – №2. – С.28-32.
6. Сидорець В.М. Сценарії розвитку детермінованого хаосу в електричному колі з дугою. /В.М.Сидорець, І.В.Пентегов //Український фізичний журнал. – 1994. – Т.39, №11-12. – С.1080-1083
7. Сидорец В.Н. Структуры бифуркационных диаграмм электрической цепи с дугой. /В.Н.Сидорец //Техническая электродинамика. – 1998. – №4. – С.15-18
8. Сидорец В.Н. Метод многократной стрельбы для исследования бифуркаций динамических систем. /В.Н.Сидорец //Электронное моделирование. – 2006. – Т.28. – №4. – С.3-13
9. Сидорец В.Н. Структуры периодических решений в нелинейной цепи с электрической дугой. /В.Н.Сидорец //Технічна електродинаміка. – 2008. Тематичний випуск, Проблеми сучасної електротехніки. – Частина 6. – С.16-19
10. Pentegov I. The Interval Dimension of Point Sets of the Poincaré Sections. /I.Pentegov, V.Sidorets //Доклады АН Украины. – 1994, – №5. – С.33-35
11. Пентегов И.В. Устройство для дуговой сварки на переменном токе. /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец, Н.В.Троицкая //А.с.№1821305 (СССР), МКИ В23к 9/00, Бюллетень изобретений, 1993, №22
12. Пентегов И.В. Устройство для дуговой сварки на переменном токе. /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец, Н.В.Троицкая //А.с. №1827334 (СССР), МКИ В23к 9/00, Бюллетень изобретений, 1993, №26
13. Пентегов И.В. Устройство для дуговой сварки. /И.В.Пентегов, В.Н.Сидорец, Н.В.Троицкая и др. //Патент №2000182 (РФ), МКИ В23к 9/00, Бюллетень изобретений, 1993, №33-36
14. Сидорец В.Н. Особенности анализа собственных значений математических моделей нелинейных электрических цепей. /В.Н.Сидорец //Электронное моделирование. – 1998. – Т.20, № 5. – С.60-71
15. Владимиров В.А. О стохастических автоколебательных решениях нелинейной гидродинамической модели сплошной среды, учитывающей эффекты релаксации. /В.А.Владимиров, В.Н.Сидорец //Доповіді НАН України. – 1999. – № 2. – С. 126-131
16. Сидорец В.Н. Нелинейные цепи с электрической дугой: периодические и хаотические колебания. /В.Н.Сидорец //Технічна електродинаміка, 2000, Тематичний випуск, Проблеми сучасної електротехніки. Частина 6. – С.7-12
17. Сидорец В.Н. Парадигма детерминированного хаоса в ключевых электрических цепях. /В.Н.Сидорец, И.В.Пентегов //Технічна електродинаміка, 2002, Тематичний випуск, Проблеми сучасної електротехніки. Частина 6. – С.3-8

18. Сидорец В.Н. Численное моделирование системы источник питания - дуга с плавящимся электродом. /В.Н.Сидорец, А.М.Жерносеков //Автоматическая сварка. – 2004. – №12. – С.10-16
19. Определение падения напряжения в области контакта электродной проволоки с мундштуком горелки при механизированных способах сварки. /И.В.Пентегов, О.И.Петриенко, С.В.Пустовойт, В.Н.Сидорец, А.В.Лавренюк //Автоматическая сварка. – 2005. – №6. – С.12-17
20. Сидорец В.Н. Компьютерное моделирование импульсно-дуговых систем. /В.Н.Сидорец, А.М.Жерносеков //Автоматическая сварка. – 2007. – №1. – С.49-52
21. Сидорец В.Н. Методы анализа режимов стабилизации сварочной дуги переменного тока. /В.Н.Сидорец, А.А.Андрианов //Технічна електродинаміка, 2007, Тематичний випуск, Силова електроніка та енергоефективність. Частина 5. – С.71-74

АНОТАЦІЇ

Сидорець В. М. Хаотична динаміка електричних кіл з дугою. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.09.05 – теоретична електротехніка. – Інститут електродинаміки НАН України, Київ, 2009.

Дисертаційна робота присвячена актуальній науковій проблемі дослідження динаміки нелінійних електричних кіл з дугою. Особлива увага була приділена детермінованому хаосу в RLC-колах з електричною дугою, питанням його виникнення, розвитку та взаємодії з періодичними коливаннями при зміні біфуркаційного параметра.

Показано, що нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду в RLC-колі з дугою призводить до появи дивного аттрактора, тобто неперіодичних автоколивань, які називаються детермінованим хаосом. Тип дивного аттрактора – гвинтовий або стрічковий.

Встановлено, що властивості подібності, самоподібності та масштабної інваріантності елементів біфуркаційних діаграм RLC-кола з дугою можуть бути покладені в основу класифікації елементарних структур, в результаті якої виділено три типові елементарні структури біфуркаційних діаграм.

Доведено, що динаміка нелінійних кіл з електричною дугою може описуватися одним різницеvim рівнянням, що дає незаперечні переваги при дослідженні в порівнянні з описом трьох диференційними рівняннями.

Ключові слова: нелінійні електричні кола, електрична дуга, детермінований хаос, дивний аттрактор, біфуркація.

Сидорец В. Н. Хаотическая динамика электрических цепей с дугой. –

Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.09.05 – теоретическая электротехника. – Институт электродинамики НАН Украины, Киев, 2009.

Диссертационная работа посвящена актуальной научной проблеме исследования динамики нелинейных электрических цепей с дугой.

Расширена область приложения обобщенной модели дуги для описания динамики длины и радиуса столба дуги. Это позволило провести анализ электрических цепей с дугой плавящегося электрода и исследования акустических свойств дуги.

С помощью предложенной модели системы «источник питания – дуга плавящегося электрода» было определено, что области изменения параметров процесса сварки, дуги, электродной проволоки и источника питания, при которых процесс сварки плавящимся электродом на постоянном токе осуществим.

Показано, что статическая вольтамперная характеристика дуги плавящегося электрода имеет возрастающий характер и существует в определенном диапазоне токов. Полученная передаточная функция электрической дуги плавящегося электрода является передаточной функцией апериодического звена первого порядка. Локальная устойчивость системы «источник питания – дуга плавящегося электрода» не гарантирует нормальной отработки возмущений возникающих в системе. Возможно нарушение условий существования в динамике, т.е. при переходном процессе.

Определено, что в RC-цепях с электрической дугой возможны как суперкритическая, так и субкритическая бифуркации Хопфа. Результатом суперкритической бифуркации Хопфа является возникновение автоколебаний в RC-цепях с электрической дугой.

Показано, что взаимодействие инерционности электрической дуги с инерционностью обратных связей может приводить к автоколебаниям, что не всегда является желательным явлением, и к неустойчивости. Для источников питания электрической дуги с обратными связями предпочтительнее использовать схемы, которые базируются на источнике тока управляемом напряжением.

Определено, что электрические RLC-цепи с дугой при увеличении бифуркационного параметра теряют локальную устойчивость. Это приводит к появлению автоколебаний, которые могут возникать либо мягко в результате суперкритической бифуркации Хопфа, либо жестко в результате субкритической бифуркации Хопфа.

Особое внимание было уделено детерминированному хаосу в RLC-цепях с электрической дугой, вопросам его возникновения, развития и взаимодействия с периодическими колебаниями при изменении бифуркационного параметра.

Показано, что бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода в RLC-цепи с дугой приводит к появлению странного аттрактора, т.е. непериодических автоколебаний, которые называются детерминированным хаосом. Тип странного аттрактора – винтовой или ленточный.

Наличие в электрической цепи нелинейного элемента с падающей внешней вольтамперной характеристикой, каким является электрическая дуга, есть

необходимым, но не является достаточным условием возникновения и существования детерминированного хаоса.

С помощью бифуркационных диаграмм определено, что детерминированный хаос неоднороден по своей структуре: при изменении бифуркационного параметра в детерминированном хаосе области хаотических колебаний чередуются с областями или так называемыми окнами периодических колебаний.

Установлено, что свойства подобия, самоподобия и масштабной инвариантности элементов бифуркационных диаграмм RLC-цепи с дугой могут лечь в основу классификации элементарных структур, в результате которой выделено три типичные элементарные структуры бифуркационных диаграмм.

В одной из элементарных структур бифуркационных диаграмм обнаружено наличие изолированных областей, которые непосредственно связаны с кризисами странного аттрактора.

Наличием складчатой структуры периодических решений для RLC-цепи с дугой удалось не только объяснить наличие изолированных областей бифуркационных диаграмм, но и предсказать место их нахождения.

Установлено, что в бифуркационных диаграммах RLC-цепи с дугой и логистического отображения наблюдается взаимодействие двух типов характеристических линий: линий устойчивых и неустойчивых состояний равновесия и линий отражений экстремума функции отображения.

Линии равновесия совпадают с ветвями бифуркационной диаграммы в области периодических процессов и проходят через узлы линий отражений экстремума в области хаоса. Линии отражений экстремума функции отображения в зоне хаоса образуют гребневые линии сгущений точек бифуркационной диаграммы. Гребневые линии имеют вид непериодических стоячих волн с узлами и пучностями.

Доказано, что динамика нелинейных цепей с электрической дугой может описываться одним разностным уравнением, что дает неоспоримые преимущества при исследовании по сравнению с описанием тремя дифференциальными уравнениями. Только на начальном этапе развития детерминированного хаоса функция отображения имеет квадратичную форму. При развитии хаоса функция отображения имеет вид гребня с квадратичными минимумами и заостренными максимумами.

Наличие каскада бифуркаций удвоения периода является необходимым, но не достаточным условием возникновения детерминированного хаоса. По совокупности четырех критериев (чрезвычайной чувствительности к начальным условиям, сплошному шумоподобному частотному спектру, положительности показателя Ляпунова, подкове Смейла) доказано, что сложные колебания, наблюдаемые в нелинейных цепях с электрической дугой, являются детерминированным хаосом.

С помощью предложенного способа многократной стрельбы достигнута высокая точность в определении знаменателя геометрической прогрессии, которую составляет первые разности ряда бифуркационных параметров в RLC-цепи с электрической дугой, соответствующий каскаду бифуркаций удвоения периода. Полученный знаменатель совпадает с константой Фейгенбаума.

Установлено, что странный аттрактор RLC-цепи с дугой является фрактальным объектом, т.к. он имеет дробную интервальную размерность.

Ключевые слова: нелинейные электрические цепи, электрическая дуга, детерминированный хаос, странный аттрактор, бифуркация.

Sydorets V. M. Chaotic Dynamics of Electric Circuits with Arc. – Manuscript.

Doctor's thesis on speciality 05.09.05 – theoretical electrical engineering –Institute of Electrodynamics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2009.

The work is devoted to topical problem of investigation of dynamics of electric circuits with arc. Special attention was given to deterministic chaos in RLC-circuits with arc, problems of its appearance, development and interaction with periodic oscillations under changing of bifurcation parameter.

It is shown that infinite cascade of period doubling bifurcations leads to appearance of strange attractor, i.e. non-period oscillation that called deterministic chaos. Attractor type is screw or stripe.

It is determined that properties of similarity, self-similarity and scaling invariance of bifurcation diagram parts of RLC-circuit with arc can be underlain of pattern classification as a result three elementary prototype of bifurcation diagram.

It is proved that dynamics of nonlinear circuits with electric arc can be described by one difference equation which gives incontestable advantage in research with respect to description by three differential equations.

Key words: nonlinear electric circuits, electric arc, deterministic chaos, strange attractor, bifurcation.